


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS
Students Observatory



Band II.

MEDDELANDEN

FRÅN

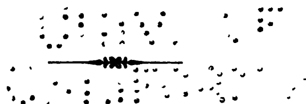
LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 21.

ÜBER DIE INTERMEDIÄRE BAHN DER KLEINEN PLANETEN

VON

C. V. L. CHARLIER



LUND 1904
BUCHDRUCKEREI HÅKAN OHLSSON

Unter *intermediäre Bahn* eines Planeten kann man im Allgemeinen eine Bahn verstehen, die eine genaue Berechnung der wirklichen Bahn vermittelt. In dem vorliegenden Aufsatz werde ich einige Betrachtungen über diejenige intermediäre Bahn mittheilen, die durch die Hinzunahme der Kepler'schen und der secularen Glieder characterisirt ist. Die so definirte Bahn fällt in der Hauptsache mit der von GYLDÉN unter dem Namen «intermediären Bahn» zuerst eingeführten Bahn-Curve.

Es wird hier die Annahme gemacht, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet, und ausserdem beschränken wir die Aufgabe insofern die Excentricität der Jupiterbahn gleich Null gesetzt wird.

Es bezeichnen r den Radius Vector, v die wahre Länge des kleinen Planeten. Die Einheiten für Abstand, Zeit und Masse werden so gewählt, dass der Radius der Jupiterbahn gleich der Einheit ist, die Attractionsconstante gleich Eins und die Summe der Massen der Sonne (m_1) und des Jupiter (μ) gleich Eins ist. Setzt man

$$(1)\begin{cases} 2H = p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 + 2\mu \left(p_1 \sin(v-t) + \frac{p_2}{r} \cos(v-t) \right) - 2U \\ U = \frac{m_1}{r} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos(v-t)}}, \\ p_1 = \frac{dv}{dt} - \mu \sin(v-t), \quad q_1 = r, \\ p_2 = r^2 \frac{dv}{dt} - \mu r \cos(v-t), \quad q_2 = v. \end{cases}$$

so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\text{(2)} \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; (i = 1, 2)$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Die Kräftefunction lässt sich nach den Vielfachen von $v - t$ entwickeln, so dass

$$U = U_0 + U \cos(v - t) + U_2 \cos 2(v - t) + \ldots$$

Die Kepler'schen Glieder und die secularen Glieder sind in U_0 enthalten, und man hat

$$\text{(3)} \qquad U_0 = \frac{m}{r} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\mu\, d\varphi}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}},$$

in welcher Form wir im Folgenden U_0 vorzugsweise betrachten wollen. Ist r kleiner als die Einheit, lässt sich U_0 nach Potenzen von r entwickeln:

$$\text{(3*)} \qquad U_0 = \frac{m_1}{r} + \mu \left\{1 + \tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{9}{64} r^4 + \tfrac{25}{256} r^6 + \ldots\right\},$$

wo das constante Glied weggelassen werden kann.

Bei der Einführung der intermediären Bahn hat GYLDÉN nur die Glieder

$$\frac{m_1}{r} + \frac{\mu}{4} r^2$$

berücksichtigt, in welchem Falle die Integration mit Hülfe elliptischer Functionen ausgeführt werden kann. Es ist indessen bei den Anwendungen auf die kleinen Planeten vortheilhaft eine Entwicklung nach den Potenzen von r möglichst zu vermeiden, und wir werden deswegen die Form (3) für U vorziehen.

Die HAMILTON'sche Function H zerspalten wir in zwei Theile H_0 und H_1, so dass

$$H = H_0 + H_1,$$

wo

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{r^2}p_2^2\right) - U_0,$$

und also

$$H_1 = \mu\left(p_1 \sin(v-t) + \frac{p_2}{r}\cos(v-t)\right) - U + U_0$$

ist.

Die intermediäre Bahn wird dann durch die folgenden Differentialgleichungen bestimmt:

$$(4) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2)$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}.$$

Die entsprechende partielle Differentialgleichung lautet

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = 2U_0 + 2h,$$

wo h eine Integrationsconstante bezeichnet.

Da U_0 nur von r abhängt, so erhält man die Lösung genau in derselben Weise wie im Zwei-Körper-Problem, so dass, indem h_2 eine zweite Constante bezeichnet,

$$(6) \qquad W = \int_{r_2}^{r} \sqrt{2U_0 + 2h - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr + h_2 v$$

ist. Die untere Grenze r_2 in diesem Integrale wird gleich einer Wurzel der Gleichung

$$(7) \qquad 2U_0 + 2h - \frac{h_2^2}{r^2} = 0$$

gesetzt.

Aus der erhaltenen Form für W folgt für die Integralgleichungen die Ausdrücke

$$
(8)\quad \begin{cases} t+\beta_1 = \dfrac{\partial W}{\partial h_1} = \displaystyle\int_{r_2}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2U_0 + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\[2ex] \beta_2 = v - \displaystyle\int_{r_2}^{r} \frac{h_2\, dr}{r^2\sqrt{2U_0 + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \end{cases}
$$

wo β_1 und β_2 zwei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Genau wie im Zwei-Körper-Problem findet man, dass $-\beta_1$ gleich der Zeit für den Durchgang des Planeten durch das Perihel ist, wo der Radius Vector gleich r_2 ist, und dass β_2 die Perihellänge bezeichnet.

Die durch (8) definirte Bewegung gehört, wie unmittelbar ersichtlich ist, zu der Gattung der bedingt periodischen Bewegungen. Die Coordinaten lassen sich als periodische Functionen zweier Argumente — welche mit der Zeit stetig wachsen — darstellen. Die Bewegung kann in der Zeit periodisch werden, wenn eine gewisse Relation zwischen den zwei Integrationsconstanten h_1 und h_2 existirt.

Die Form der periodischen Reihe für r und v wird aus (8) leicht erhalten. Die erste Gleichung zeigt dass r zwischen zwei Wurzeln der Gleichung (7) schwankt. Wir nennen diese Wurzeln r_1 und r_2 $(r_1 > r_2)$. Der Radius Vector r ist eine periodische gerade Function von $t + \beta_1$ und die Länge $2T$ der Periode ist durch die Formel

$$
T = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{R}},
$$

$$
R = 2U_0 + 2h - \frac{h_2^2}{r^2}
$$

gegeben. Wir können also schreiben

$$
(9)\qquad r = \sum c \cos i\, n_1 (t + \beta),
$$

wo
$$n_1 = \frac{\pi}{T},$$

und die Koefficienten c_i in verschiedener Weise erhalten werden können.

Die zweite Gleichung (8) giebt

$$v = \beta_2 + \int_{r_2}^{r} \frac{h_2\, dr}{r^2 \sqrt{R}}.$$

Setzen wir hier den obigen Ausdruck für r hinein, so erhält man offenbar für v die Form

(10) $$v = n_2 (t + \beta_1) + \beta_2 + \Sigma\, e_i \sin i\, n_1 (t + \beta_1),$$

wo

(11) $$n_2 = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{h_2\, dr}{r^2 \sqrt{R}},$$

da nämlich, für $t = -\beta_1$, v gleich β_2 ist.

Die beiden Argumente, die hier vorkommen, sind also

$$u_1 = n_1 (t + \beta_1),$$
$$u_2 = n_2 (t + \beta_1) + \beta_2.$$

Die Grösse n_2 entspricht der *mittleren Bewegung des kleinen Planeten*. Die Grösse $n_1 - n_2$ ist gleich der *mittleren Bewegung des Perihels*. Der kleine Planet braucht in der That die Zeit $T = \frac{\pi}{n_1}$ um von Perihel nach dem Aphel zu gelangen und die Länge des Planeten wächst — durchschnittlich — um 180^0 in der Zeit $\frac{\pi}{n_2}$.

Eine beliebige Function von r und v, die in v periodisch ist mit der Periode 2π, lässt sich in eine FOURIER'sche Reihe nach den Vielfachen von u_1 und u_2 entwickeln.

Die mittlere Bewegung n_1 fällt für $\mu = 0$ mit n_2 zusammen. Wir bekommen in der That dann die bekannte Formeln des Zwei-Körper-Problems.

Es wird sich wahrscheinlich herausstellen, dass n_1 immer grösser als n_2 ist, so dass das Perihel in der intermediären Bahn sich immer vorwärts bewegt. Man wäre geneigt zu vermuthen, dass in gewissen Fällen das Perihel stillstehen könnte, den Librationsfällen im Perihel der kleinen Planeten entsprechend. Es muss aber bemerkt werden, dass diese Librationsfälle dadurch characterisirt sind, dass das Perihel des kleinen Planeten um das Perihel der Jupiterbahn oscillirt, und also kein Gegenstück besitzen, wenn die Excentricität der Jupiterbahn gleich Null ist. Jedem Werth von h_1 und h_2 entspricht aber eine periodische Lösung der ersten Gattung des allgemeinen Problems und so oft n_1 und n_2 commensurabel sind, kann man die intermediäre Bahn als Anfangscurve einer periodischen Lösung der zweiten Gattung des asteroidischen Drei-Körper-Problems betrachten.

Die intermediäre Bahn ist zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien r_2 und r_1 eingeschlossen. Das Theorem von STÄCKEL lehrt, dass *dieses Gebiet von der intermediären Bahn überall dicht ausgefüllt ist.*

Werden die Constanten h_1, h_2, β_1 und β_2 der intermediären als *veränderlich* betrachtet, kann man die Differentialgleichungen des Problems streng erfüllen, und man erhält nach der Theorie der Variation der willkürlichen Constanten für ihre Veränderungen die Gleichungen

$$(12) \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h_i}, \quad \frac{dh_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}. \qquad (i = 1, 2)$$

Die obigen Ausdrücke für r und v zeigen, dass in H_1 keine secularen Glieder verhanden sind. Indessen kommen die Grössen h_1 und h_2 in n_1 und n_2 vor und daraus folgt, dass in

(12) Glieder, die selber secularer Art sind, zum Vorschein kommen. Man kann aber dieses Übelstandes los werden, indem man sich eines Verfahrens bedient, das einem von DELAUNAY öfters benutzten Artificium analog ist.

Setzt man nämlich

$$(13)\quad \begin{cases} L_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{r_2}^{r_1}\sqrt{2U_0 + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\,dr, \; L_2 = h_2, \\ l_1 = n_1(t+\beta_1), \; l_2 = n_2(t+\beta_1) + \beta_2 - t. \end{cases}$$

und bemerkt, dass

$$(14)\quad \frac{1}{n_1} = \frac{\partial L_1}{\partial h_1}, \; \frac{n_2}{n_1} = -\frac{\partial L_1}{\partial h_2},$$

woraus folgt, dass

$$-\frac{1}{n_1^2}\frac{\partial n_1}{\partial h_2} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial h_1\,\partial h_2} = -\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_2}{\partial h_1} + \frac{n_2}{n_1^2}\frac{\partial n_1}{\partial h_1},$$

oder

$$(15)\quad n_1\frac{\partial n_2}{\partial h_1} = \frac{\partial n_1}{\partial h_2} + n_2\frac{\partial n_1}{\partial h_1},$$

so bekommt man

$$\frac{dL_1}{dt} = -\frac{1}{n_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} + \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2},$$

oder da

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial H_1}{\partial l_1}n_1 + \frac{\partial H_1}{\partial l_2}n_2,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} = \frac{\partial H_1}{\partial l_2}$$

ist,

$$\frac{dL_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial l_1};$$

und weiter ist

$$\frac{dL_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} = -\frac{\partial H_1}{\partial l_2}.$$

Es ist auch

$$\frac{dl_1}{dt} = n_1\left(1 + \frac{d\beta_1}{dt}\right) + (t + \beta_1)\frac{dn_1}{dt}$$

$$= n_1 + n_1\frac{\partial H_1}{\partial h_1} - (t + \beta_1)\left[\frac{\partial n_1}{\partial h_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} + \frac{\partial n_1}{\partial h_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}\right]$$

$$= n_1 + n_1\frac{\partial H_1}{\partial h_1} - (t + \beta_1)\left[\frac{\partial n_1}{\partial h_1}\left(n_1\frac{\partial H_1}{\partial l_1} + n_2\frac{\partial H_1}{\partial l_2}\right) + \frac{\partial n_1}{\partial h_2}\frac{\partial H_1}{\partial l_2}\right]$$

Man hat aber

$$\frac{\partial H_1}{\partial h_1} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial H_1}{\partial l_1}(t + \beta_1)\frac{\partial n_1}{\partial h_1} + \frac{\partial H_1}{\partial l_2}(t + \beta_1)\frac{\partial n_2}{\partial h_1},$$

wo unter

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)$$

die Ableitung von H_1 nach h_1 verstanden wird unter der Beschränkung, dass man nur in Bezug auf h_1, in sofern diese Grösse in n_1 und n_2 *nicht* vorkommt, differentiirt.

Unter Berücksichtigung von (15) bekommt man also

$$\frac{dl_1}{dt} = n_1 + n_1\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right).$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\frac{dl_2}{dt} = n_2 - 1 + n_2\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right) + \left(\frac{\partial H_1}{\partial h_2}\right).$$

Werden in der rechten Seite dieser Gleichungen h_1 und h_2 gegen L_1 und L_2 vertauscht so bekommt man somit die Gleichungen

$$\frac{dl_1}{dt} = n_1 + \frac{\partial H_1}{\partial L_1}, \quad \frac{dL_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial l_1},$$

$$\frac{dl_2}{dt} = n_2 - 1 + \frac{\partial H_1}{\partial L_2}, \quad \frac{dL_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial l_2}.$$

Wird aber in der Gleichung

$$(16) \qquad L_1 = \frac{1}{\pi}\int_{r_2}^{r_1} \sqrt{2U_0 + 2h_1 - \frac{L_2^2}{r^2}}\, dr$$

h_1 als eine Function von L_1 und L_2 betrachtet so erhält man

$$(17) \qquad n_1 = \frac{\partial h_1}{\partial L_1};\ n_2 = \frac{\partial h_1}{\partial L_2}.$$

Wir können also die obigen Gleichungen in canonische Form bringen indem wir setzen

$$F = -h_1 + L_2 - H_1$$

in welchem Falle

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_i}, \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_i}. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

Für die characteristische Function F erhält man die Form

$$F = \Sigma A_{ij} \cos(il_1 + jl_2),$$

wo

$$A_{00} = -h_1 + L_2.$$

Bei der numerischen Berechnung der intermediären Bahn wird es vortheilhaft sein nicht die Werthe für h_1 und h_2 als gegeben zu betrachten, sondern von den Maximal- und den Minimal-Werthen — r_1 und r_2 — für den Radius Vector auszugehen. Man macht dann die Aufsuchung der Wurzeln der Gleichung $R = 0$ überflüssig, wogegen die Werthe von h_1 und h_2 leicht aus r_1 und r_2 erhalten werden.

Die Berechnung der mittleren Bewegungen n_1 und n_2 wird bequem mittelst mechanischer Quadratur ausgeführt. Es wird dabei nothwendig die Werthe der Function

$$\frac{R}{(r_1 - r)(r - r_2)}$$

für $r = r_1$ und $r = r_2$ zu berechnen und man erhält dann (für diese Werthe von r)

$$(19) \qquad \frac{R}{(r_1 - r)(r - r_2)} = \frac{\frac{2h^2_2}{r^3} - \frac{2}{r^2} - \mu\frac{2}{\pi}\left[F - \frac{E}{1 - r^2}\right]}{-2r + r_1 + r_2},$$

wo F und E die elliptischen Integralen der ersten und der zweiten Gattung bezeichnen.



MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 22.

ON THE SINGULAR CURVE OF THE ELLIPTIC MOTION

BY

C. V. L. CHARLIER

LUND 1904,
AKTIEBOLAGET SKÅNSKA CENTRALTRYCKERIET.

On the singular curve of the elliptic motion

by

C. V. L. Charlier.

In the fifth volume of "Mécanique céleste" (Addition) *Laplace* has demonstrated that the coordinates in the problem of two bodies may be developed in series of powers of the eccentricity, if the eccentricity is smaller than a certain numerical value, approximately equal to 0.6627. This is owing to the fact, that the coordinates, considered as analytical functions of the eccentricity, possess a singular point situated at the distance 0.6627 from the origin. Meanwhile these functions possess other singularities also and the object of this memoir is to determine the position of all these singular points. It will be shown, that they are situated on a certain continuous curve. This curve I call the *singular curve of the elliptic motion.*

The relative coordinates in the problem of two bodies may be expressed in the following form (compare the lessons on "Die Mechanik des Himmels" of the author Bd. I § 9)

$$x = A\,\xi + B\,\eta\,,$$
$$y = A_1\,\xi + B_1\,\eta\,,$$
$$z = A_2\,\xi + B_2\,\eta\,,$$

where A_i and B_i denote certain trigonometrical functions of the longitudes of the perihelion and of the node, and of the inclination, and where

$$\xi = a\,(\cos w - e),$$
$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\,\sin w.$$

The quantity w here designs the eccentric anomaly of the planet. The coordinates are hence *holomorph* functions of the eccentric anomaly.

If the coordinates are considered as functions of the eccentricity, than the dominion of convergence in the expansion of the coordinates in powers of $e-e_0$ is dependent on the position of the singular points of these functions. The expressions above show, that these singular points are partly $e = \pm 1$, (which points are branch-points of the function $\sqrt{1-e^2}$) and moreover the singularities of the function w, considered as dependent on the eccentricity.

The problem is hence reduced to the following: determine the radius of convergence in the expansion of w in powers of $e - e_0$!

The functional connection between the eccentric anomaly and the eccentricity is given through *Kepler*'s equation.

Designing the eccentricity with ζ, the mean anomaly with l, this equation is

(1) $$w - \zeta \sin w = l.$$

Through this equation w is given as function ζ. The quantity l may be considered as a (constant) parameter, that has an arbitrary *real* value between $-\infty$ and $+\infty$. We put

(2) $$w = \varphi\,(\zeta),$$

or, indicating the parameter l,

(2*) $$w = \varphi\,(\zeta,\, l).$$

The question is to determine the singular points of the function φ. The position of these points once determined, we know, that the expansion of 0 in the domain of the point $\zeta = \zeta_0$ is convergent within a circle, having its centre in ζ_0 and going through the *next* singular point.

The function φ is an infinitely multiform function of ζ, so that to a given value of ζ belongs an infinite numbre of values of w. These values may be found in the following manner.

Putting

$$(3) \qquad \zeta = \xi + i\,\eta, \quad w = x + i\,y, \; \varkappa^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

we obtain from (1), if the real and the imaginary parts on both sides be separated:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varkappa^2 \sin x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = (x - l)\,\xi + y\,\eta, \\[2ex] \varkappa^2 \cos x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = y\,\xi - (x - l)\,\eta. \end{cases}$$

Let us assume firstly, that the eccentricity has a *real* value, so that $\eta = 0$.

From (4) we then find, that the values

$$(5) \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x - l = \xi \sin x \end{cases}$$

than always give *one* solution of (4). Is $\xi < 1$, as we may until further notice assume, than the second equation (5) is satisfied for a single value of x. This value is, as we will immediately prove, the only real value of w in this case.

For determining the other, we may write the relation (4) — where we still assume $\eta = 0$ — in the form

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \dfrac{x - l}{\xi \sin x}, \\[2ex] \dfrac{e^y - e^{-y}}{2\,y} = \dfrac{1}{\xi \cos x}. \end{cases}$$

The values of x, that satisfy these equations, may be determined in a graphical way. We may consider these equations as the equations of two curves, that we design with (A) and (B). The points of intersection of these curves give the sought values of x and y.

The curve (B) consists of an infinite number of branches, that may be all obtained, if a single branch be transferred parallel to itself the distance $2\,k\,\pi$ ($k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$) in the direction of the axis of x.

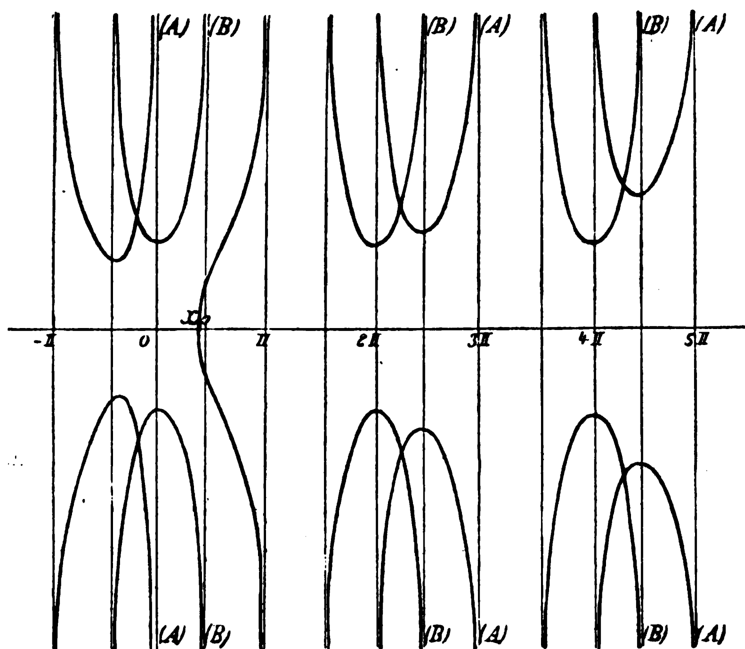


Fig. 1.

Hence it is only necessary to consider a single branch of this curve. Both curves being symmetrical to the x-axis, we may confine us to positive values of y.

The left side of the equation for (B)

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2\,y} = \frac{1}{\xi \cos x}$$

continually increases with y and has for $y = 0$ its minimum value, that is equal to unity. This may be most simply proved, if we introduce the powerseries for e^y and e^{-y}. Hence to each value of x corresponds a *single* value of y. The minimum of y is obtained for $x = 0$ and hence determined through the equation

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2\,y} = \frac{1}{\xi}\,.$$

The value of ξ being, according to our assumption, smaller than unity, it follows, that the curve (B) never cuts the axis of the x-coordinates. For $x = \pm \frac{\pi}{2}$ we obtain $y = \infty$. The considered branch hence asymptotically approaches the lines $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

As to the curve (A) the discussion is of the same nature. The left side has a minimum value equal to unity for $y = 0$ and increases with increasing y into infinity. The curve consists of an infinite number of branches, to which the lines $x = n\,\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are asymptotes. The curve is symmetrical to the x-axis and the different branches are enclosed between the two parallel lines $x = 2\,n\,\pi$ and $x = (2\,n + 1)\,\pi$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Moreover there is a branch between $x = 0$ and $x = \pi$, which cuts the x-axis in a point x_0, determined through the equation

$$x_0 - \xi \sin x_0 = l, \tag{7}$$

and which approaches asymptotically the line $x = \pi$.

The curves (A) and (B) have, for $\xi = {}^1/_2$, $l = \frac{\pi}{4}$ the form indicated by the figure 1.

The values of the function φ (ζ) for this value of the eccentricity and of the mean anomaly are the points of intersection between (A) and (B). A single value, x_0, is real and found through (7). The x-coordinates of the other points are situated between $x = 4\,n\frac{\pi}{2}$ and $(4\,n + 1)\frac{\pi}{2}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ and between $x = 4\,n\frac{\pi}{2}$ and $x = (4\,n - 1)\frac{\pi}{2}$ for $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$, and approach with increasing n the value $x = (4\,n + 1)\frac{\pi}{2}$ for positive values of n and the value $x = (4\,n - 1)\frac{\pi}{2}$ for negative values of n. The y-coordinates go with increasing n towards infinity. I will give later the equation of a curve, that passes through all the points of intersection between the curves (A) and (B).

For imaginary values of the eccentricity the calculation of the corresponding values of w is somewhat more troublesome. Meanwhile it is possible also than to carry it out in an elementary manner. From (4) we obtain the following equations

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{4}\varkappa^2 \left\{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2\,x\right\} = (x - l)^2 + y^2,$$

$$\text{(b)}\quad \varkappa^4 = \frac{4\,[(x - l)\,\xi + y\,\eta]^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4\,[y\,\xi - (x - l)\,\eta]^2}{(e^y - e^{-y})^2},$$

$$\text{(c)}\quad \varkappa^4 = \frac{[(x - l)\,\xi + y\,\eta]^2}{\sin^2 x} - \frac{[y\,\xi - (x - l)\,\eta]^2}{\cos^2 x},$$

or separating the x and the y-coordinates.

$$\text{(a)}\quad e^{2y} + e^{-2y} - \frac{4\,y^2}{\varkappa^2} = 2\cos 2\,x + \frac{4\,(x - l)^2}{\varkappa^2},$$

$$\text{(b)} \quad \tfrac{1}{4}\varkappa^4 (e^{2y} - e^{-2y})^2 = (x-l)^2 [\varkappa^2 e^{2y} + \varkappa^2 e^{-2y} - 2(\xi^2 - \eta^2)]$$
$$- 8(x-l)\, y\, \xi\, \eta$$
$$+ y^2 [\varkappa^2 e^{2y} + \varkappa^2 e^{-2y} + 2(\xi^2 - \eta^2)],$$

$$\text{(c)} \quad \varkappa^4 = y^2 \left[\frac{\eta^2}{\sin^2 x} - \frac{\xi^2}{\cos^2 x}\right] +$$
$$+ 2y \left[\frac{(x-l)\,\xi\,\eta}{\sin^2 x} + \frac{(x-l)\,\xi\,\eta}{\cos^2 x}\right]$$
$$+ (x-l)^2 \left[\frac{\xi^2}{\sin^2 x} - \frac{\eta^2}{\cos^2 x}\right].$$

These equations may all be brought into the form

$$f(x) = g(y),$$

where $f(x)$ and $g(y)$ are certain functions of x and y. All curves, the equations of which have this form, may easily be traced.

The points of intersection between two of the curves (a), (b) and (c) determine the values of x and y. The equation (a) may be designed as the "modular equation", being dependent only on the modulus $\varkappa$ of the eccentricity, not on the values of the real and imaginary part of this quantity. The corresponding curve differs from the other in as much as it has a continuous course.

At the discussion of the equations (b) and (c) it must be taken into account, that in taking the square of the equations (4) there have been introduced false solutions, that must be eliminated.

Hence we have proved, that w is an infinitely multiform function of the eccentricity. If the eccentricity is real and smaller than the unity, then of the corresponding values of w a single one is real. It is this root,

that is alone of interest for the astronomical applications of the Keplerian equation.

The question is to develop this root for a given value ζ_0 of ζ in powers of $\zeta - \zeta_0$.

To this purpose it suffices to applicate the *existence theorem* of *Cauchy*.

From the equation

$$(8) \qquad w - l - \zeta \sin w = 0$$

we derive the corresponding differential equation

$$(9) \qquad \frac{d\,w}{d\,\zeta} = \frac{\sin w}{1 - \zeta \cos w}.$$

The theorem of *Cauchy* tells, that the integral w of this equation, that for $\zeta = \zeta_0$ obtains the value $w = w_0$, may be expanded in a series of the form

$$w = w_0 + c_1 (\zeta - \zeta_0) + c_2 (\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots$$

if the right member of (9) can be expanded in the form of a series of positive integral powers of $w - w_0$ and $\zeta - \zeta_0$.

Hence the singular values of ζ, for which such an expansion does not exist, may be obtained, if we eliminate w between the equations

$$(8) \qquad w - l - \zeta \sin w = 0$$

and

$$(10) \qquad 1 - \zeta \cos w = 0.$$

The positions of these singular points may be determined in the following manner.

From (10) we derive

$$\sqrt{-1}\sin w = \pm\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1},$$

$$e^{\sqrt{-1}\,w} = \frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1},$$

and writing (8) in the form

$$e^{\sqrt{-1}\,w} = e^{\sqrt{-1}\,\zeta\sin w + l\sqrt{-1}},$$

we obtain the following equation for the evaluation af ζ

(11) $$\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1} = e^{\pm\sqrt{1-\zeta^2}+\sqrt{-1}\,l}.$$

This equation may be multiplied with ζ, if we observe, that the root $\zeta = 0$, that we, in this manner, introduce into the equation, not satisfies the equation (11) and *hence is no singular root.*

We thus obtain the equation

(12) $$1 \pm \sqrt{1-\zeta^2} = \zeta\, e^{\pm\sqrt{1-\zeta^2}+\sqrt{-1}\,l}.$$

The question is to determine the roots of this equation.

To this purpose we introduce a new variable z, defined through the equation

(13) $$z = 1 \pm \sqrt{1-\zeta^2},$$

which gives

(13*) $$\zeta^2 = 2z - z^2,$$

From (12) we now obtain

(14) $$\left(\frac{2}{z}-1\right)e^{\frac{2z}{2}} = e^{2+\sqrt{-1}\,2\,l}.$$

The parameter l has an arbitrary *real* value. The corresponding z-values may on the contrary be real or imaginary.

If we put

$$z = \rho\, e^{\theta i} = \rho \cos \theta + \sqrt{-1}\, \rho \sin \theta$$

and compare the real and imaginary parts on the right and on the left side, we obtain the two equations

$$(15)\begin{cases} e^{2\rho\cos\theta}\left[\frac{2}{\rho}\cos(2\rho\sin\theta-\theta)-\cos(2\rho\sin\theta)\right]=e^{2}\cos 2l, \\ e^{2\rho\cos\theta}\left[\frac{2}{\rho}\sin(2\rho\sin\theta-\theta)-\sin(2\rho\sin\theta)\right]=e^{2}\sin 2l, \end{cases}$$

from which the following simple equations are derived

$$(16) \qquad \frac{4}{\rho^2} + 1 - \frac{4}{\rho}\cos\theta = e^{4-4\rho\cos\theta},$$

$$(17) \quad \frac{2}{\rho}\sin(2l+\theta-2\rho\sin\theta)-\sin(2l-2\rho\sin\theta)=0.$$

These equations we consider as the equations of two real curves, the points of intersection of which give the position of the singular points.

The curve (16), that in independent of l, consists of two separate branches. The one, that we will consider more fully below, is of a form reminding of that of the lemniscate, and has for $\rho \cos \theta = 1$ a double point. The other branch consists of the straight line $\rho \cos \theta = 1$ (fig. 2).

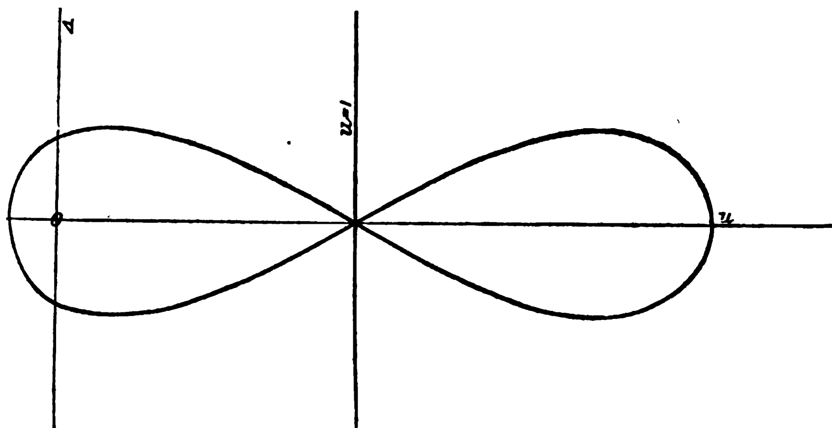


Fig. 2.

The points of intersection between this line and (17) are easy to find. Putting $\rho = 1 : \cos\theta$ in (17), we obtain the solutions

$$(18) \qquad \begin{cases} \theta - \operatorname{tg}\theta = \frac{n\pi}{2} - l, \\ \rho = \frac{1}{\cos\theta}. \end{cases}$$

These singular points represent an infinite number of isolated points that are all situated on the line $\rho \cos\theta = 1$.

The discussion of the curves (16) and (17) is facilitated by the introduction of rectiliniar coordinates. Putting

$$u = \rho\cos\theta, \quad v = \rho\sin\theta,$$

we obtain these equations in the form

$$(19) \qquad v^2 = \frac{4(1-u)}{e^{4(1-u)} - 1} - u^2,$$

$$(20) \qquad (u-1)^2 = 1 + 2v\operatorname{cotg}(2l - 2v) -- v^2,$$

where it may be observed, that to (19) must be added the straight line $u = 1$, which solution we have already discussed.

The curve (19) is symmetrical to the axis of the u-coordinates and also to the straight line $u = 1$. Indeed putting

$$s = 1 - u,$$

we may write (19) in the form

$$(21) \qquad v^2 = -1 - s^2 + 2s \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{e^{2s} - e^{-2s}},$$

or

$$v^2 = 2s \operatorname{cotghp} 2s - s^2 - 1,$$

from which we immediately conclude, that the curve is symmetrical to the line $u = 1$.

Further we observe, that s cannot assume arbitrary great values. The maximum value of s corresponds to $v = 0$, and is hence determined through the relation

$$(21^*) \qquad e^{4s} = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2.$$

This equation has two real roots: $s = 0$ and $s = 1.195$ (approximately). The former root gives a double point, the latter is the sought maximum value.

The form of the curve is seen from the figure 2.

In the vicinity of the point $s = 0$ we have approximately

$$v^2 = \frac{1}{3} s^2,$$

so that the curve here consists of the two straight lines

$$v = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

and

$$v = -\frac{s}{\sqrt{3}}.$$

It is for our present purpose not necessary to know the form of the curves (17) or (20). The form of these curves is depending on the value of the parameter l, and as l accepts all real values, the point of intersection between (16) and (17) moves on the curve (16). Meanwhile, for the convergence of the series, used in astronomy, expanded in powers of the eccentricity it is necessary, that the eccentricity has such a value, that the series converge *for all real values of l.* Hence the sought radius of convergence is equal to the *least* radius obtained in varying l between $-\infty$ and $+\infty$. On the other hand is it possible to demonstrate, that the real quantity l may be chosen in such a manner, that the curve (17) passes through any point of the curve (16). Consequently it is sufficient to consider this curve, as any point on it for a certain value of l may be singular and hence in the astronomical problem, where l accepts all real values, also *must* be considered as a singular point.

The possibility of choosing l in this manner may be demonstrated as follows.

Firstly we find from (18), that any point on the line $\rho \cos \theta = 1$ may be singular. For a given value of θ, say θ_0, we obtain the corresponding l from the equation

$$l = \frac{n\pi}{2} - \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0.$$

That the curve (20) by choosing the parameter l conveniently may pass through any point on (19), is equally easy to prove. Indeed, for any values u_0 and

v_0 for u and v, the equation (20) is satisfied, if l be so chosen, that

$$\mathrm{tg}\,(2\,l - 2\,v_0) = \frac{2\,v_0}{(u_0 - 1)^2 - 1 + v_0^2},$$

which relation always may be fulfilled through a appropriate choice of l.

From u and v we obtain the value of ζ with the help of the equation (13*). Putting

$$\zeta = \xi + i\,\eta = \varkappa\, e^{\tau \sqrt{-1}},$$

we obtain the relations

$$(23)\qquad \begin{cases} \varkappa^2 \cos 2\,\tau = -(1 - u)^2 + v^2 + 1\,, \\ \varkappa^2 \sin 2\,\tau = \quad 2\,v\,(1 - u)\,, \end{cases}$$

from which $\varkappa$ and τ and also ξ and η, may be calculated.

The curve (19) is through this substitution transformed in a curve, which determines those values of the eccentricity, for which the function (2) $\varphi\,(\zeta)$ possesses singularities. These singularities are all points of ramification (branch-points).

This curve, which I will call the *singular curve of the elliptic motion,* and which is represented in the figure 19, consists of a curve $ABCD$ and two straight lines AE and CF, coinciding with the positive and the negative ξ-Axis, if the parts of these axes between O and A and between O and C be subtracted. The radius vector from O to a point on the curve is identical with the modulus of ζ, and is in A equal to unity and then decreases towards B, where it is has the value 0.6627 . . .

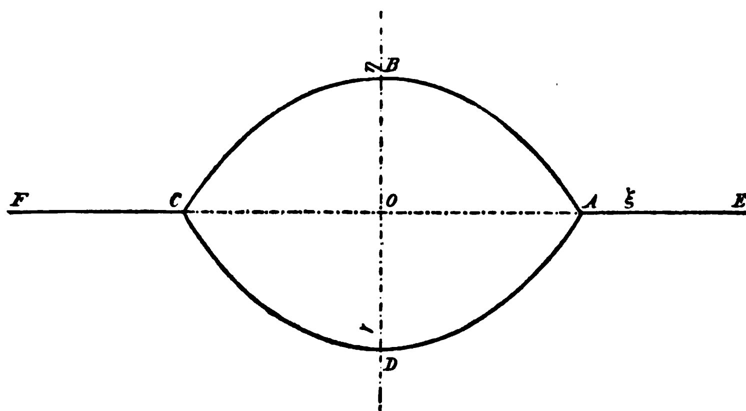


Fig. 3.

We find the value q of this modulus, if we substitute in (12) $l = \frac{\pi}{2}$ and $\zeta = i\,q$, and solve the equation

(24) $$1 + \sqrt{1+q^2} = q\,e^{\sqrt{1+q^2}}$$

in regard to q.

The formula (24) coincides with the formula of *Laplace* for the calculation of the radius of convergence in the expansion of the coordinates in series of powers of the eccentricity in the vicinity of $\zeta = 0$. We obtain the same value, if we solve the equation (21*), which here has the form

(24*) $$e^{2s} = \frac{s+1}{s-1},$$

in regard to s, and then, according to (23), calculate q $(= \varkappa)$ from the formula

(24**) $$q = \sqrt{s^2 - 1}.$$

Indeed it is found, that these systems are indentical.

The figure (19) was calculated from the following numerical values of the coordinates ξ and η of the singular curve.

Tab. I.

Coordinates of the singular curve.

s	v	$\varkappa$	ξ	η
0.0	0.000	1.000	1.000	0.000
0.1	0.057	0.9966	0.9965	0.0057
0.2	0.114	0.9868	0.9865	0.0231
0.3	0.165	0.9707	0.9694	0.0511
0.4	0.212	0 9491	0.9449	0 0896
0.5	0.251	0.9226	0.9122	0.1376
0.6	0.282	0.8917	0.8702	0.1945
0.7	0.302	0.8574	0.8174	0.2586
0.8	0.310	0.8208	0.7514	0.3299
0.9	0.302	0.7823	0.6681	0.4068
1.0	0.273	0.7413	0.5586	0.4873
1.1	0.211	0.7021	0.4047	0.5737
1.13	0.181	0.6899	0.3406	0.5999
1.16	0.140	0.6779	0.2585	0.6268
1.19	0.071	0.6665	0.1287	0.6539

The curve has for $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$ a cusp, and passes here into the straight lines $\eta = 0$ ($|\xi| > 1$). If ξ decreases from the value $\xi = + 1$, the value of η increases continually and obtains it maximum value for $\xi = 0$. The angle A is equal to 120^0.

The singular curve permits in a simple manner to determine the value of the radius of convergence in the

expansion of the coordinates in the elliptic motion in series of powers of $\zeta - \zeta_0$. To this object the point ζ_0 is taken as the centre of a circle, and the *least* circle is sought, touching the singular curve. The radius of this circle is the sought radius of convergence.

Supposing, for instance, that it is requested to expand the coordinates in series of powers of $\zeta - 0.3$, we obtain from the figure for the radius of convergence the value 0 544 and consequently this expansion converges for all such real values — ξ — of the eccentricity, that lie between $\xi = -0.244$ and $\xi = +0.844$. Hence these series converge for all *positive* values of the eccentricity, smaller than 0.844, whereas the expansion in series of powers of ξ only converge for $\xi <$ 0.6627. As in the astronomical applications of such series only real values of the eccentricity are concerned, it is in this manner possible to increase the dominion of convergence in choosing conveniently the value of ζ_0. The following little table gives the approximate values of the radius of convergence for different values of ζ_0.

Tab. II.

Values of the radius of convergence.

ζ_0	R	$\zeta_{min.}$	$\zeta_{max.}$
0.0	0 663	0.0	0.663
0.1	0 644	0 0	0.744
0.2	0 598	0.0	0.798
0.3	0.544	0 0	0.844
0.4	0.480	0.0	0 880
0.5	0,409	0.091	0.909
0.6	0 330	0.270	0 930
0 7	0 251	0.449	0.951
0.8	0 169	0.631	0.969
0.9	0.087	0.813	0.987

Here R designs the value of the radius of convergence in the expansion in series of powers of $\zeta - \zeta_0$. With ζ_{min} the least positive value of the eccentricity is meant within the circle of convergence.

Though the radius of convergence continually decreases, as ζ_0 increases from the value $\zeta_0 = 0$, we conclude from the table, that the dominion of the *positive* values of ζ within the circle of convergence increases, until we reach a value, situated between 0 4 and 0 5 — approximately equal to 0.445 — for ζ_0. An expansion in series of powers of $\zeta - 0.445$ would converge for all positive values of the eccentricity, smaller then 0.892.

A similar research on the corresponding expansion of the coordinates in the *hyperbolic* motion would easily be performed.



LUND 1904,
AKTIEBOLAGET SKÅNSKA CENTRALTRYCKERIET.

Meddelanden No 23 Lund   1.01

SÄRTRYCK UR
ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN.
BAND 1.

DIE SINGULÄRE CURVE DER HYPERBOLISCHEN BEWEGUNG

VON

H. G. BLOCK

MIT DREI TEXTFIGUREN

STOCKHOLM
P. A. NORSTEDT & SÖNER

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

PARIS
PAUL KLINCKSIECK
3 RUE CORNEILLE

1904

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 1.

Meddelande från Lunds Observatorium.

MEDDELANDE N:o 23

Die singuläre Curve der hyperbolischen Bewegung.

Von

H. G. BLOCK.

Mit drei Textfiguren.

Mitgeteilt am 11 Mai 1904 durch C. V. L. CHARLIER.

In Meddelanden från Lunds Observatorium N:r 22 hat CHARLIER eine einfache Methode angegeben, um die Convergenz der Reihenentwicklungen im Zweikörperprobleme zu prüfen, und er hat dieselbe auf die elliptische Bewegung angewandt. Diese Methode wird hier benutzt werden, um die Convergenz der Entwicklungen der Coordinaten in der hyperbolischen Bewegung nach Potenzen der Excentricität zu untersuchen.

Alles hängt von der Entwicklung der Hülfsgrösse w ab, welche durch die Relation

$$\frac{\sqrt{\beta}}{a}(t - t_0) = e \operatorname{sinhp} w - w$$

bestimmt ist. Wir setzen hier der Kürze halber

$$\frac{\sqrt{\beta}}{a}(t - t_0) = l$$

und schreiben ζ statt e, um Verwechslungen mit der Basis der natürlichen Logarithmen zu vermeiden. Die Gleichung bekommt dann die Form

$$l = \zeta \operatorname{sinhp} w - w. \tag{1}$$

Diese Gleichung differentiieren wir, wobei wir ζ und w als Veränderliche betrachten, und bekommen dann

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{\operatorname{sinhp} w}{\zeta \operatorname{coshp} w - 1}.$$

Mit Hülfe dieser Differentialgleichung können wir die Entwicklung von w nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ erhalten, und diese Entwicklung convergiert innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte in ζ_0, welcher durch den nächsten singulären Punkt der Differentialgleichung geht. Wir müssen also die singulären Punkte dieser Gleichung aufsuchen; sie werden von

(2) $$\zeta \operatorname{coshp} w - 1 = 0$$

zusammen mit der Gleichung (1) bestimmt. Die Lage der singulären Punkte hängt von dem Werthe von l ab; und wenn l durch reelle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, so beschreiben die singulären Punkte eine Curve in der ζ-Ebene, deren Aussehen wir zu ermitteln haben. Zu diesem Zwecke eliminieren wir w zwischen den Gleichungen (1) und (2). Wir bekommen aus (2)

$$\operatorname{coshp} w = \frac{1}{\zeta},$$

$$\operatorname{sinhp} w = \pm\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}.$$

Ferner

$$\frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{1}{\zeta},$$

oder

$$e^{2w} - \frac{2}{\zeta} e^w + 1 = 0,$$

woraus

$$w = \log\left[\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}\right]$$

hervorgeht. Wir setzen in (1) ein und bekommen

$$l = \pm\zeta\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} - \log\left[\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}\right],$$

welche Gleichung wir in der Form

(3) $$1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta e^{\pm i\sqrt{\zeta^2 - 1} - l}$$

schreiben.

Der am nächsten zur Hand liegende Weg, um die Gleichung der Curve, welche die singulären Punkte in der ζ-Ebene beschreiben, (wir wollen sie kurz die singuläre Curve nennen) zu finden, wäre offenbar, $\xi + i\eta$ statt ζ in (3) zu schreiben und das Reelle vom Imaginären zu trennen. Dadurch würde man zwei Gleichungen bekommen, aus welchen man durch Elimination von l die Gleichung der singulären Curve erhalten würde. Bei der Trennung der reellen und imaginären Teile von einander stösst man indessen auf Schwierigkeiten, und deshalb ist es vorteilhaft, die Gleichung (3) erst durch die Substitution

$$\frac{1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} = z$$

zu transformieren. Hieraus bekommt man

$$\pm i\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta z - 1,$$

woraus

(4) $$\zeta = \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

Wir hatten

$$\begin{aligned} \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1} &= \zeta z - 1, \\ &= \frac{2z^2}{z^2 + 1} - 1, \\ &= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke setzen wir in (3) ein und bekommen dann

(3*) $$z = e^{\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} - l}.$$

Es ist hier am bequemsten, mit Polarcoordinaten zu rechnen. Wir setzen also

$$z = re^{\theta i}.$$

Hieraus bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} &= \frac{r^2 \cos 2\theta - 1 + ir^2 \sin 2\theta}{r^2 \cos 2\theta + 1 + ir^2 \sin 2\theta}, \\ &= \frac{r^4 - 1 + 2ir^2 \sin 2\theta}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta}. \end{aligned}$$

Wir setzen in (3*) ein und erhalten

$$re^{\theta i} = e^{\frac{r^4-1}{1+r^4+2r^2\cos 2\theta} - l} \cdot e^{i\frac{2r^2\sin 2\theta}{1+r^4+2r^2\cos 2\theta}}.$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir durch Trennung des Reellen vom Imaginären

$$(5) \qquad \begin{aligned} r &= e^{\frac{r^4-1}{1+r^4+2r^2\cos 2\theta} - l}, \\ \theta &= \frac{2r^2 \sin 2\theta}{1 + r^4 + 2r^2\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist schon von l frei und repräsentiert offenbar die singuläre Curve in der z-Ebene; die erste Gleichung sagt aus, dass r positiv sein muss, weil l sonst imaginär sein würde. Sonst können r und θ beliebige reelle Werthe annehmen; immer lässt sich ein reeller Werth für l finden, der dieser Gleichung Genüge thut.

Um nun zu der ζ-Ebene zu übergehen, haben wir

$$\zeta = \varrho e^{\varphi i}$$

zu setzen. Diesen Ausdruck zugleich mit dem entsprechenden Ausdrucke für z führen wir in (4) ein und bekommen

$$(6) \qquad \varrho e^{\varphi i} = \frac{2re^{\theta i}}{r^2\cos 2\theta + 1 + ir^2 \sin 2\theta}.$$

Um ϱ zu erhalten, multiplizieren wir diese Gleichung mit der complex conjugierten Gleichung und erhalten

$$\varrho^2 = \frac{4r^2}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta},$$

und also

$$\varrho = \frac{2r}{\sqrt{1 + r^4 + 2r^2\cos 2\theta}}.$$

Um φ zu bekommen, schreiben wir die Gleichung (6)

$$\varrho e^{(\varphi - \theta)i} = \frac{2r}{r^2 \cos 2\theta + 1 + ir^2 \sin 2\theta},$$

und hieraus bekommen wir durch Trennen des Reellen vom Imaginären

$$\varrho \cos(\theta - \varphi) = \frac{2r}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta}(r^2 \cos 2\theta + 1),$$

$$\varrho \sin(\theta - \varphi) = \frac{2r}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta} \cdot r^2 \sin 2\theta,$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen mit einander

$$\operatorname{tg}(\Theta - \varphi) = \frac{r^2 \sin 2\theta}{1 + r^2 \cos 2\theta}.$$

Um den Winkel $\theta - \varphi$ vollständig zu bestimmen, ist noch zu bemerken, dass das Vorzeichen von $\sin(\theta - \varphi)$ dem Vorzeichen von $\sin 2\theta$ gleich ist.

Der Ausdruck für ϱ lässt sich höchst bedeutend vereinfachen, wenn wir beachten, dass aus (5) folgt

$$\frac{2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{4r^2}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta}.$$

Also nimmt ϱ die Form an

$$\varrho = \sqrt{\frac{2\theta}{\sin 2\theta}}.$$

Um φ durch θ allein auszudrücken, hat man in dem Ausdrucke für $\operatorname{tg}(\theta - \varphi)$ den Werth für r^2 zu schreiben, welchen man durch Lösung der Gleichung (5) erhält. Diese Lösung lautet

$$r^2 = \frac{\sin 2\theta}{\theta} - \cos 2\theta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin 2\theta}{\theta} - \cos 2\theta\right)^2 - 1}.$$

Die Gleichung der singulären Curve in der ζ-Ebene würde erhalten werden, wenn man zwischen den Ausdrücken in θ für ϱ und φ θ eliminierte. Diese Elimination ist indessen nicht ausführbar, und deshalb muss man sich begnügen, ϱ und φ als Functionen der dritten Veränderlichen θ dargestellt zu haben. Wie man sieht, kommt θ in den Formeln fast überall mit 2 multipliziert vor; um die Formeln ein wenig zu vereinfachen, führen wir daher statt θ die neue Veränderliche ψ, durch

$$2\theta = \psi$$

definiert, ein. Die Gleichungen, welche die Polarcoordinaten der singulären Curve als Functionen der Variabel ψ bestimmen, werden dann

(7) $$r^2 = 2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi \pm \sqrt{\left(2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi\right)^2 - 1},$$

(8) $$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\psi - \varphi\right) = \frac{r^2 \sin\psi}{1 + r^2\cos\psi},$$

(9) $$\varrho = \sqrt{\frac{\psi}{\sin\psi}}.$$

Wir haben nun das Aussehen der singulären Curve mit Hülfe dieser Gleichungen zu erörtern. Erstens sehen wir, dass die Gleichung (5) von $\theta = 0$ befriedigt wird, welchen Werth r auch haben möge (es muss ja reel und positiv sein), d. h., der positive Teil der x-Achse ist ein Teil der singulären Curve in der z-Ebene. Und aus (4) sehen wir, dass wenn z durch reale Werthe von 0 bis $+\infty$ variiert, ζ ebenfalls durch reale Werthe von 0 bis $+1$ und von da bis 0 zurück variiert. Also ist der Teil der ξ-Achse, der zwischen 0 und $+1$ liegt, ein Zweig der singulären Curve in der ζ-Ebene. Um die übrigen Zweige der Curve zu finden, müssen wir vor Allem die Grenze der Variation von ψ aufsuchen. Zu dem Zweck betrachten wir die Gleichung (7). Hieraus geht hervor, dass

$$2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi \geqq 0$$

sein muss, weil sonst r^2 negativ herauskommen würde. Weiter lässt sich die Quadratwurzel folgendermassen schreiben:

$$\sqrt{\left(2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi + 1\right)\left(2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi - 1\right)},$$

und die Factoren unter dem Wurzelzeichen müssen entweder zugleich positiv oder zugleich negativ sein. Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, weil dann

$$2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi < -1$$

und also negativ sein würde, was ja nicht zulässig ist. Der erstere Fall giebt die Bedingung:

$$2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi \geqq 1.$$

Um diese Ungleichkeit zu discutieren, nehmen wir ein rechtwinkliges Achsensystem, wobei wir ψ als Abscisse und

$$f(\psi) = 2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi$$

als Ordinate nehmen. Wir bekommen so eine Curve, deren Aussehen in Fig. 1 durch die dickgezogene Linie angedeutet

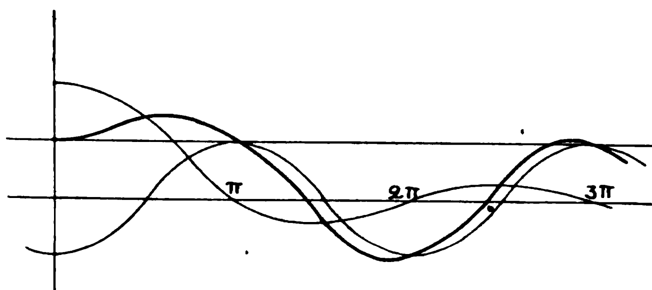


Fig. 1.

ist; sie ist offenbar in Bezug auf die y-Achse symmetrisch, da ihre Gleichung durch Änderung des Vorzeichens von ψ nicht geändert wird. Um diese Form der Curve zu bekommen, construieren wir zuerst die Curven

$$y = 2\frac{\sin\psi}{\psi}$$

und

$$y = -\cos\psi,$$

welche durch die feingezogenen Linien angedeutet sind; durch Zusammensetzung dieser beiden Curven bekommt man die gezeichnete Form der Curve $y = f(\psi)$. Nun ist klar, dass jeder Teil dieser Curve, welcher oberhalb des Geraden $y = 1$ liegt, zu einem zulässigen Gebiete für ψ Anlass giebt. Wir bekommen also ein zulässiges Gebiet von 0 bis π, dann eines unmittelbar bevor 3π, ein kleineres bevor 5π, und allgemein ein zulässiges Gebiet unmittelbar bevor $(2n + 1)\pi$. Die entsprechenden negativen Werthe sind auch zulässig. Wie man leicht findet, fällt ϱ für die so zulässig befundenen Werthe real aus.

Jedem zulässigen Gebiete für ψ entspricht ein Zweig der singulären Curve, welche somit unendlich viele Zweige enthält. Dies hängt damit zusammen, dass die Gleichung (1) w als eine unendlich vieldeutige Function von l bestimmt. Wir haben aber nur die Entwicklung des Zweiges, der für $l = 0$ $w = 0$ giebt, zu untersuchen, und wir brauchen also nur den Zweig der singulären Curve zu betrachten, welcher diesem Functionenzweige entspricht.

Für $l = 0$ soll also $w = 0$ sein. Nun ist die Frage: Welcher ist der singuläre Punkt, der diesen Werthen entspricht? Durch diesen Punkt muss nämlich der Zweig der singulären Curve, mit dem wir es zu thun haben, gehen.

Für $l = 0$ soll $w = 0$ sein, also

$$\operatorname{coshp} w = 1.$$

Und wenn der Punkt singulär sein soll, so ist

$$\operatorname{coshp} w = \frac{1}{\zeta},$$

also ist $\zeta = 1$ der den Werthen $l = 0$, $w = 0$ entsprechende singuläre Punkt.

Nun sieht man aus den Gleichungen (7), (8) und (9), dass für ψ gleich Null $\varrho = 1$ und $\varphi = 0$ werden, d. h., der Zweig der singulären Curve, welcher dem zulässigen Gebiete für ψ von $-\pi$ bis $+\pi$ entspricht, geht durch den Punkt $\zeta = 1$; aber mit keinem anderen Zweige ist dies der Fall, denn der einzige Werth von ψ, für welchen ϱ gleich Eins wird, ist $\psi = 0$. Wir bekommen also den gesuchten Zweig der Curve, wenn wir ψ von $-\pi$ bis $+\pi$ variieren lassen; hierzu kommt noch der Teil der ξ-Achse zwischen 0 und $+1$, welcher oben als ein Zweig der singulären Curve befunden worden ist und offenbar dem Functionenzweige, der für l gleich Null verschwindet, angehört, da er ja durch den Punkt $\zeta = 1$ geht.

Mit Hülfe der Formeln (7), (8) und (9) können wir nun eine beliebige Anzahl Punkte der Curve berechnen. Dabei ist es hinreichend, von positiven ψ-Werthen auszugehen, denn wie man unmittelbar findet, ändert φ nur das Zeichen, wenn wir $-\psi$ statt ψ in den Formeln schreiben, ϱ bleibt dagegen unverändert. Die Curve ist also in Bezug auf die ξ-Achse symmetrisch. Die Berechnung giebt folgende Werthe:

ψ.	r_1.	r_2.	φ.	ϱ.
0°	1,00	1,00	0° 0′	1,000
30	1,16	0,86	2 15	1,023
60	1,31	0,76	8 46	1,100
90	1,44	0,70	19 7	1,258
120	1,48	0,67	33 4	1,553
150	1,41	0,71	51 6	2,288
180	1,00	1,00	—	∞

Die beiden Werthe von r, welche den gegebenen ψ-Werthen entsprechen, sind auch angegeben worden, um die Construction der singulären Curve in der z-Ebene zu ermöglichen. Die Construction dieser Curve aus den gegebenen numerischen Werthen bietet keine Schwierigkeit; ihr Aussehen ist in Fig. 2 gegeben.

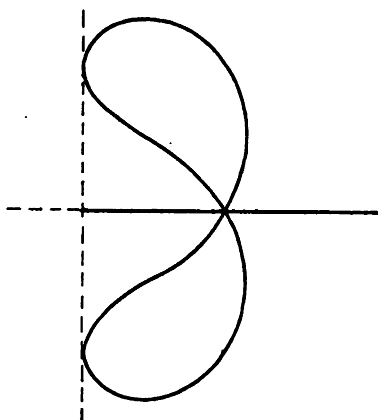


Fig. 2.

Um dagegen die Curve in der ζ-Ebene construieren zu können, müssen wir erst einige Untersuchungen vornehmen. Für $\psi = 180°$ nimmt nämlich der Ausdruck für $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\psi - \varphi)$ die Form $\frac{0}{0}$ an; es ist also zu untersuchen, welchen Werth φ in der That annimmt. Weiter hat man zu untersuchen, ob die Curve Asymptoten besitzt, und schliesslich ist die Form der Curve in der Nähe des Punktes $\zeta = 1$ zu ermitteln.

Wir schreiben in den Formeln (7) und (8) $(2n+1)\pi - \alpha$ statt ψ und entwickeln nach Potenzen von α. Wir bekommen

$$2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi = \frac{2\sin\alpha}{(2n+1)\pi - \alpha} + \cos\alpha,$$

$$= 1 + \frac{2\alpha}{(2n+1)\pi} + \dots,$$

woraus

$$r^2 = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\sqrt{\alpha} + \dots.$$

Ferner

$$r^2 \sin \psi = \alpha \pm \frac{2}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \alpha^{3/2} + \ldots;$$

$$1 + r^2 \cos \psi = \mp \frac{2}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sqrt{\alpha} + \ldots;$$

und also

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) = \mp \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2} \sqrt{\alpha} - \alpha + \ldots,$$

woraus

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi \pm \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2} \sqrt{\alpha} + \ldots.$$

Wenn wir hier $n = 0, 1, 2, \ldots$ nehmen und α gleich Null setzen, so erhalten wir die φ-Werthe, die in den einzelnen Zweigen $\varrho = \infty$ entsprechen. Man bekommt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ für sämtliche Zweige.

Die Frage nach den Asymptoten ist nun leicht zu beantworten. Es handelt sich nur darum, ob der Ausdruck $\varrho \cos \varphi$ einen Grenzwerth besitzt oder nicht, wenn sich ψ dem Werthe $(2n+1)\pi$ nähert. Durch Reihenentwicklung erhalten wir

$$\varrho \cos \varphi = \pm (\tfrac{1}{2}\pi + n\pi) + \ldots.$$

Hieraus erhellt, dass die Curve eine Anzahl von parallelen Asymptoten besitzt, welche sich in der Entfernung π von einander befinden. Uns interessiert eigentlich nur der Asymptot des Zweiges, der durch den Punkt $\zeta = 1$ geht; wir bekommen denselben, indem wir n gleich Null setzen und das positive Vorzeichen nehmen. Der Zweig der singulären Curve, mit welchem wir es zu thun haben, nähert sich also asymptotisch dem Geraden $\xi = \frac{1}{2}\pi$.

Wir haben jetzt nur noch die Form der Curve in der Umgebung von $\zeta = 1$ zu untersuchen. Zu dem Zweck entwickeln wir die Ausdrücke

$$\xi - 1 = \varrho \cos \varphi - 1,$$

$$\eta = \varrho \sin \varphi$$

nach Potenzen von ψ. Wir haben

$$2\frac{\sin\psi}{\psi} - \cos\psi = 1 + \frac{\psi^2}{6} + \ldots,$$

woraus

$$r^2 = 1 \pm \frac{\psi}{\sqrt{3}} + \ldots.$$

Ferner

$$r^2 \sin\psi = \psi \pm \frac{\psi^2}{\sqrt{3}} + \ldots,$$

$$1 + r^2\cos\psi = 2 \pm \frac{\psi}{\sqrt{3}} + \ldots,$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\psi - \varphi) = \frac{\psi}{2} \pm \frac{\psi^2}{4\sqrt{3}} + \ldots,$$

also

$$\varphi = \mp \frac{\psi^2}{4\sqrt{3}} + \ldots.$$

Weiter

$$\varrho = \sqrt{\frac{\psi}{\sin\psi}},$$

$$= 1 + \frac{\psi^2}{12} + \ldots.$$

Hieraus bekommt man endlich

$$\xi - 1 = \varrho\cos\varphi - 1 = \frac{\psi^2}{12} + \ldots,$$

$$\eta = \varrho\sin\varphi = \mp \frac{\psi^2}{4\sqrt{3}} + \ldots.$$

Man hat also in der Nähe des Punktes $\zeta = 1$

$$\frac{\eta}{\xi - 1} = \pm\sqrt{3} = \pm \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Curve im Punkte $\zeta = 1$ einen Eckpunkt hat, und die drei Zweige der Curve bilden hier Winkel von 120° mit einander.

Die Construction der Curve bietet nunmehr keine Schwierigkeit; ihr Aussehen ist in Fig. 3 gegeben.

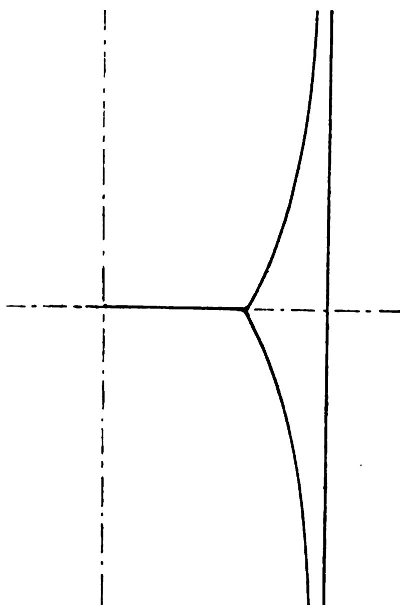


Fig. 3.

Aus der Form der Curve lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Weder eine Entwicklung nach Potenzen von ζ, noch eine Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{\zeta}$ ist möglich, wenigstens convergieren sie nicht für alle Werthe von l, d. h. von der Zeit.

Entwicklungen nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$, wenn ζ_0 real und grösser als Eins ist, sind immer möglich, und der Convergenzbezirk dieser Entwicklungen ist um so grösser, je grösser ζ_0 ist. Für Werthe von ζ_0, die wenig von Eins verschieden sind, ist der Convergenzradius angenähert

$$(\zeta_0 - 1) \sin 60^\circ = (\zeta_0 - 1) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Schliesslich sei kurz der Zusammenhang der singulären Curve der hyperbolischen Bewegung mit derselben der elliptischen Bewegung erwähnt. Die Gleichung, welche bei der elliptischen Bewegung (3) entspricht, lautet folgendermassen:[1]

$$1 \pm \sqrt{1 - \zeta'^2} = \zeta' e^{\pm \sqrt{1 - \zeta'^2} + u},$$

wo die Excentricität mit ζ' bezeichnet ist. Diese Gleichung geht in (3) über, wenn man die Substitution

$$i \left[\log \frac{1 + \sqrt{1 - \zeta'^2}}{\zeta'} - \sqrt{1 - \zeta'^2} \right] = \log \frac{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} - \sqrt{1 - \zeta^2}$$

---

[1] Siehe Meddelanden från Lunds Observatorium N:r 22.

anwendet. Diese Relation transformiert also die singulären Curven der elliptischen und hyperbolischen Bewegungen in einander. Bekanntlich vermittelt eine Relation zwischen den beiden complexen Veränderlichen ζ und ζ' eine conforme Abbildung zwischen den ζ- und ζ'-Ebenen. Das ist hier leicht zu sehen; denn offenbar entsprechen einander die Punkte $\zeta = 1$ und $\zeta' = 1$. In beiden diesen Punkten stossen drei Zweige der singulären Curven unter Winkeln von 120° zusammen.

Tryckt den 29 juli 1904.

Stockholm 1904. Kungl. Boktryckeriet.

Meddelanden N:o 24
Lund

SÄRTRYCK UR
ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN.
BAND 1.

ÜBER

DIE TRIGONOMETRISCHE FORM DER INTEGRALE DES PROBLEMS DER DREI KÖRPER

VON

C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
P. A. NORSTEDT & SÖNER

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

PARIS
PAUL KLINCKSIECK
3 RUE CORNEILLE

1904



ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.

BAND 1.

Meddelande från Lunds observatorium.

Über die trigonometrische Form der Integrale des Problems der drei Körper.

Von C. V. L. CHARLIER.

Mitgetheilt am 11 Mai 1904.

1. Bekanntlich ist von GYLDÉN u. A. bewiesen, dass die Coordinaten im Probleme der drei Körper in rein trigonometrischer Form dargestellt werden können. Bei diesen Entwickelungen spielen die s. g. kleinen Divisoren eine wesentliche Rolle, und zwar verursachen sie im Allgemeinen, dass die abgeleiteten Reihen divergent sind.

Bei den meisten Untersuchungen über diese Frage bedient man sich der Entwickelungen nach Potenzen der störenden Massen. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf diese Methode, die am klarsten von POINCARÉ im zweiten Bande seiner »Méthodes nouvelles» entwickelt worden ist.

Wir nehmen an, dass die Bewegung durch zwei Freiheitsgrade bestimmt ist. Die Störungsfunction F ist nach Potenzen einer kleinen Grösse μ entwickelt, so dass

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

Die Coordinaten (»Elemente») seien x_1, x_2, y_1, y_2, und es wird angenommen, dass F in y_1 und y_2 periodisch ist mit der Periode 2π. Ausserdem wird, der Einfachheit wegen, vorausgesetzt, dass F_0 nur von x_1 und x_2 abhängig ist.

Die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung lautet

$$(1) \qquad F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}; \; y_1, \; y_2\right) = -C,$$

wo C eine Constante bezeichnet. Es handelt sich darum eine Function S von y_1 und y_2 zu finden, die diese Gleichung befriedigt, und zwar wollen wir S nach Potenzen von μ entwickeln. Es sei

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots$$

dies Integral.

Bekanntlich kann man dann, formell betrachtet, eine solche Function finden und S_0, S_1, $S_2, \ldots$ werden periodische Functionen von y_1 und y_2. Diese Functionen enthalten kleine Divisoren von der Form

$$in_1^0 + jn_2^0,$$

wo i und j ganze Zahlen bezeichnen. Die Grössen n_1^0 und n_2^0 sind gewisse Functionen der Integrationsconstanten x_1^0 und x_2^0. Ich will beweisen, *dass man diese Grössen innerhalb eines gewissen Gebietes willkürlich wählen kann, und dass man sie im Besonderen so bestimmen kann, dass die Reihen för* S_1, $S_2, \ldots$ *convergent sind, welche Werthe* x_1^0 *und* x_2^0 *auch haben.*

2. Es sei $\psi(x_1, x_2)$ eine beliebige Function von x_1 und x_2. Wir setzen

$$R = F_0 + \mu\psi.$$

Dann ist

$$F = R + \mu(F_1 - \psi) + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \ldots$$

Wir benutzen dann die Methode von POINCARÉ um das Integral der Gleichung

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, y_1, y_2\right) = -C$$

zu finden und erhalten, indem

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots$$

gesetzt wird, folgende Gleichungen zur Bestimmung von S_0, S_1, S_2 u. s. w.

$$(2) \qquad R\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C_0$$

$$(3) \qquad n_1^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1 - \psi + C_1$$

und allgemein für $p \geqq 1$

(3*) $$n_1^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p ,$$

wo Φ_p eine von S_0, S_1, ..., S_{p-1} abhängige Function bezeichnet. Die Constanten C_p werden so bestimmt, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen, für $p \geqq 1$, kein von y_1 und y_2 unabhängiges Glied enthalten.

Wir bekommen somit S_p in rein trigonometrischer Form wo das constante Glied gleich Null ist. Angenommen, dass

(4) $$\Phi_p = \sum A_{ij}^{(p)} \cos (iy_1 + jy_2)$$

ist, so hat man offenbar

(4*) $$S_p = \sum \frac{A_{ij}^{(p)}}{in_1^0 + jn_2^0} \sin (iy_1 + jy_2) .$$

Die Lösung der Gleichung (2) schreiben wir in der Form

(5) $$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 ,$$

wo x_1^0 und x_2^0 die zwei willkürlichen Constanten bezeichnen, und

(5*) $$C_0 = -R(x_1^0, \quad x_2^0) .$$

Die Grössen n_1^0 und n_2^0 sind in der folgenden Weise definirt

(6) $$\begin{cases} n_1^0 = -\dfrac{\partial R}{\partial x_1^0} = \dfrac{\partial C_0}{\partial x_1^0} , \\ n_2^0 = -\dfrac{\partial R}{\partial x_2^0} = \dfrac{\partial C_0}{\partial x_2^0} . \end{cases}$$

Nun ist $\psi(x_1, x_2)$ nach unserer Annahme eine beliebige Function von x_1 und x_2. Folglich kann man, bei gegebenen Werthen von x_1^0 und x_2^0, diese Function so wählen, dass n_1^0 und n_2^0 ganz beliebige Werthe annehmen. Practisch genommen, wird man sich zu solchen Werthen von n_1^0 und n_2^0 beschränken, die wenig von

$$-\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0} \text{ und } -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0}$$

abweichen.

Es ist leicht zu sehen, dass man demnach n_1^0 und n_2^0 immer so wählen kann, dass die Reihen (4*) für S_p convergiren. Betrachten wir z. B. die Reihe für S_1, so erhält man aus (3)

$$S_1 = \sum{}' \frac{A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \sin(iy_1 + jy_2). \tag{7}$$

Die »Störungsfunction» hat die Form

$$F_1 - \psi = \sum A_{ij}^{(1)} \cos(iy_1 + jy_2) \tag{7*}$$

und convergirt wie eine Potenzreihe nach Potenzen von x_2. Bei geeigneter Wahl der canonischen Veränderlichen kann man erreichen, dass $A_{ij}^{(1)}$ von der Ordnung j_2 in Bezug auf x_2 ist.

Die Reihe (7) ist dann, wie BRUNS bewiesen hat, convergent, wenn wir n_1^0 und n_2^0 so wählen, dass der Quotient $n_1^0 : n_2^0$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung *mindestens zweiten Grades* mit ganzzahligen Coefficienten ist.

Es hat dann keine Schwierigkeit den Beweis zu führen, dass die Reihen für S_2, S_3 u. s. w. auch convergiren. Es genügt zu diesem Zwecke die Beweisführung von BRUNS für diese Fälle weiter zu führen.

Es ist aber nicht erlaubt, die Function ψ so zu wählen, dass der Quotient $n_1^0 : n_2^0$ einer algebraischen Gleichung *ersten* Grades mit ganzzahligen Coefficienten genügt, so dass

$$pn_1^0 + qn_2^0 = 0$$

wäre, wo unter p und q ganze Zahlen verstanden werden. Die Gleichung (3*) lässt sich dann nicht befriedigen, wenn unter den periodischen Gliedern in Φ_s ein Glied

$$A_{pq}^{(s)} \cos(py_1 + qy_2)$$

vorkommt.

In solchem Fall lässt sich S nicht nach Potenzen von μ entwickeln. Man findet aber, dass dann eine Entwickelung nach Potenzen von $\sqrt{\mu}$ zum Ziele führt, wie von BOHLIN zuerst nachgewiesen worden ist.

3. Unter den verschiedenen Arten, in welchen man die Function ψ wählen kann, ist eine besonders der Aufmerksamkeit verdient. Man kann diese Wahl so treffen, *dass n_1^0 und*

n_2^0 *mit den wahren mittleren Bewegungen der Grössen* y_1 *und* y_2 *zusammenfallen.*

Die Wahl der Function R geschieht dann in folgender Weise.

Man setzt

$$R = F_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \dots, \tag{8}$$

wo Ω_1, $\Omega_2, \dots$ vorläufig unbestimmte Functionen von x_1 und x_2 bezeichnen. Man hat also

$$F = R + \mu(F_1 - \Omega_1) + \mu^2(F_2 - \Omega_2) + \dots$$

Indem man die Gleichung

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}; y_1, y_2\right) = - C$$

durch

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots$$

zu befriedigen sucht, erhält man für S_0 die Gleichung

$$R\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = - C, \tag{9}$$

welche giebt

$$S_0 = x'_1 y_1 + x'_2 y_2,$$

wo x'_1 und x'_2 zwei Integrationsconstanten bezeichnen. Setzt man weiter

$$n'_1 = -\frac{\partial R}{\partial x'_1}; \; n'_2 = -\frac{\partial R}{\partial x'_2}, \tag{9*}$$

so ergiebt sich für die Function S_p eine Gleichung von der Form

$$n'_1 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n'_2 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p - \Omega_p, \tag{10}$$

wo Φ_p von $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ abhängig ist.

Hier kann Φ_p als eine periodische Function von y_1 und y_2 betrachtet werden. Wird der mittlere Werth dieser Function mit $[\Phi_p]$ bezeichnet, so setzt man

$$\Omega_p = [\Phi_p]$$

und erhält, wenn Φ_p die Form

$$\Phi_p = \sum A_{ij}^{(p)} \cos(iy_1 + jy_2)$$

hat, für das Integral von (10) den Werth

$$S_p = \sum{}' B_{ij}^{(p)} \sin(iy_1 + jy_2),$$

wo

$$B_{ij}^{(p)} = \frac{A_{ij}^{(p)}}{in'_1 + jn'_2}$$

ist. Mit dem Strich oben am Summenzeichen bezeichne ich, dass die Summe ohne constantes Glied ist.

Man erhält somit für S die Form

$$S = x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \Sigma' B_{ij} \sin(iy_1 + jy_2). \tag{11}$$

Hieraus erhält man die Integralausdrücke, aus denen x_1, x_2, y_1 und y_2 abgeleitet werden können:

$$\text{(11*)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y_1} &= x_1 = x'_1 + \Sigma' i B_{ij} \cos(iy_1 + jy_2), \\ \frac{\partial S}{\partial y_2} &= x_2 = x'_2 + \Sigma' j B_{ij} \cos(iy_1 + jy_2), \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial C}{\partial x'_1} t + c_1 = \frac{\partial S}{\partial x'_1},$$

$$\frac{\partial C}{\partial x'_2} t + c_2 = \frac{\partial S}{\partial x'_2}.$$

Es ist aber nach (9*)

$$n'_1 = \frac{\partial C}{\partial x'_1}, \quad n'_2 = \frac{\partial C}{\partial x'_2}$$

und folglich lauten dieser Gleichungen

$$\text{(11**)} \quad \begin{aligned} n'_1 t + c_1 &= y_1 + \sum{}' \frac{\partial B_{ij}}{\partial x'_1} \sin(iy_1 + jy_2), \\ n'_2 t + c_2 &= y_2 + \sum{}' \frac{\partial B_{ij}}{\partial x'_2} \sin(iy_1 + jy_2), \end{aligned}$$

welche unmittelbar zeigen, dass n'_1 und n'_2 die wahren mittleren Bewegungen von y_1 und y_2 bezeichnen. Es wird natürlich dabei nothwendig vorauszusetzen, dass die Summen in der rechten Seite dieser Gleichungen wirklich convergent sind,

weil sonst der Begriff der wahren mittleren Bewegung in der Luft schwebt.

Im asteroidischen Drei-Körper-Problem erhält man in dieser Weise für die wahren mittleren Bewegungen die Werthe

$$(12)\quad \begin{cases} n'_1 = \dfrac{1}{x_1'^3} - N - \mu\left\{\dfrac{1}{x'_1}A_1^0 + \dfrac{x'_2}{2x_1'^2}(A_1^0 + 7A_2^0 + 6A_3^0) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{x_2'^2}{2x_1'^3}(-3A_2^0 + 3A_3^0 + 21A_4^0 + 15A_5^0)\right\}, \\ n'_2 = N - \mu\left\{\dfrac{1}{2x'_1}(A_1^0 + A_2^0) - \dfrac{1}{2x_1'^2}(A_1^0 + A_2^0 - 3A_3^0 - 3A_4^0)x'_2\right\}. \end{cases}$$

4. Eine andere Art die Divisoren zu wählen ist von nicht geringerem Interesse. Man kann die Grössen n_1^0 und n_2^0 so wählen, dass sie *mit den zur Zeit* $t = 0$ *osculirenden Werthen der mittleren Bewegungen von* y_1 *und* y_2 *zusammenfallen.* Man kann dies in folgender Weise erreichen.

Wir setzen

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots,$$
$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots,$$

und erhalten zunächst

$$F_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C_0,$$

woraus

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2$$

erhalten wird. Wir wollen die Functionen $S_1, S_2, \ldots$ so bestimmen, dass die Integrationsconstanten x_1^0 und x_2^0 mit den zur Zeit $t = 0$ osculirenden Werthen von x_1 und x_2 zusammenfallen.

Für S_1 gilt die Gleichung

$$(13)\qquad n_1^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1(x_1^0, x_2^0; y_1, y_2) + C_1,$$

und allgemein

$$(13^*)\qquad n_1^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p,$$

wo Φ_p von $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ abhängt.

Hier ist

$$(13^{**}) \qquad n_1^0 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0}; \; n_2^0 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0}.$$

Nehmen wir an, dass

$$F_1 = \sum A_{ij}^{(1)} \cos(iy_1 + jy_2)$$

ist, so kann man das Integral von (13) in der Form

$$(14) \qquad S_1 = \alpha_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 + \sum' B_{ij}^{(1)} \sin(iy_1 + jy_2)$$

schreiben, wo

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0}$$

ist. Wir haben vorher die Constanten α_1, β_1 und γ_1 gleich Null gesetzt, wollen aber jetzt in anderer Weise über sie verfügen. Die nämlichen Constanten können offenbar willkürlich gewählt werden, wenn nur die Relation

$$(15) \qquad n_1^0\beta_1 + n_2^0\gamma_1 = A_{00}^{(1)} + C_1$$

besteht. Diese Gleichung kann durch eine geeignete Wahl von C_1 befriedigt werden.

Nachdam S_1 bestimmt ist, erhält man S_2 in ähnlicher Weise. Wir setzen

$$\Phi_p = \sum A_{ij}^{(p)} \cos(iy_1 + jy_2)$$

und erhalten dann

$$(16) \qquad S_p = \alpha_p + \beta_p y_1 + \gamma_p y_2 + \sum' B_{ij}^{(p)} \sin(iy_1 + jy_2),$$

wo

$$B_{ij}^{(p)} = \frac{A_{ij}^{(p)}}{in_1^0 + jn_2^0}$$

ist. Die Constante C_p wird aus der Gleichung

$$(16^*) \qquad n_1^0\beta_p + n_2^0\gamma_p = A_{00}^{(p)} + C_p$$

bestimmt.

Wir können nun S in der Form

$$(17) \quad S = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \alpha + \beta y_1 + \gamma y_2 + \Sigma' B_{ij} \sin(iy_1 + jy_2)$$

schreiben, wo

$$\alpha = \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots,$$
$$\beta = \mu\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \ldots,$$
$$\gamma = \mu\gamma_1 + \mu^2\gamma_2 + \ldots,$$
$$B_{ij} = \mu B_{ij}^{(1)} + \mu^2 B_{ij}^{(2)} + \ldots,$$

ist.

Aus (17) erhalten wir die Integrale

(18)
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial S}{\partial y_1} = x_1^0 + \beta + \Sigma' i B_{ij} \cos(iy_1 + jy_2), \\ x_2 = \dfrac{\partial S}{\partial y_2} = x_2^0 + \gamma + \Sigma' j B_{ij} \cos(iy_1 + jy_2) \end{cases}$$

und

(18*)
$$\begin{cases} n_1 t + c_1 = \dfrac{\partial S}{\partial x_1^0} = \\ \qquad = y_1 + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x_1^0} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x_1^0} y_1 + \dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1^0} y_2 + \sum{}' \dfrac{\partial B_{ij}}{\partial x_1^0} \sin(iy_1 + jy_2), \\ n_2 t + c_2 = \dfrac{\partial S}{\partial x_2^0} = \\ \qquad = y_2 + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x_2^0} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x_2^0} y_2 + \dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2^0} y_2 + \sum{}' \dfrac{\partial B_{ij}}{\partial x_2^0} \sin(iy_1 + jy_2); \end{cases}$$

wo

(18**)
$$n_1 = \frac{\partial C}{\partial x_1^0}, \quad n_2 = \frac{\partial C}{\partial x_2^0}$$

ist.

Die Grössen α, β, γ sollen so gewählt werden, dass, für $t = 0$, $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ ist und dass ausserdem die Constanten c_1 und c_2 mit den Werthen von y_1 und y_2 für $t = 0$ zusammenfallen. Wir bezeichnen diese Werthe mit y_1^0 und y_2^0, und erhalten somit die Bedingungen

(19)
$$\begin{cases} 0 = \beta + \Sigma' i B_{ij} \cos(iy_1^0 + jy_2^0), \\ 0 = \gamma + \Sigma' j B_{ij} \cos(iy_1^0 + jy_2^0), \\ 0 = \alpha + \beta y_1^0 + \gamma y_2^0 + \Sigma' B_{ij} \sin(iy_1^0 + jy_2^0), \end{cases}$$

aus denen α, β und γ bestimmt sind.

Die Coefficienten n_1 und n_2 der Zeit in der linken Seite von (18*) sind nach (18**) gleich den partiellen Ableitungen

von C nach x_1^0 und x_2^0. Wir haben aber nach (16*) und (19)

$$C_p = -A_{00}^{(p)} - \Sigma'(in_1^0 + jn_2^0)B_{ij}^{(p)} \cos(iy_1^0 + jy_2^0)$$

oder

$$C_p = -\Sigma A_{ij}^{(p)} \cos(iy_1^0 + jy_2^0) = -\Phi_p(y_1^0, y_2^0). \tag{20*}$$

Die Constanten C_p müssen also so bestimmt werden, dass die rechten Seiten von (13*) für $t = 0$ verschwinden.

Da ausserden

$$C_0 = -F_0,$$

so hat man

$$-C = F_0 + \Sigma\mu^p \Phi_p(y_1^0, y_2^0), \tag{20}$$

so dass

$$\begin{cases} n_1 = n_1^0 - \Sigma\mu^p \dfrac{\partial\Phi_p}{\partial x_1^0}(y_1^0, y_2^0), \\ n_2 = n_2^0 - \Sigma\mu^p \dfrac{\partial\Phi_p}{\partial x_2^0}(y_1^0, y_2^0). \end{cases} \tag{21}$$

Die Werthe der *wahren* mittleren Bewegungen N_1 und N_2 lassen sich leicht aus (18*) ableiten. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur die periodischen Glieder in (18*) zu vernachlässigen und die Gleichungen nach y_1 und y_2 aufzulösen. Die Coefficienten der Zeit in diesen Ausdrücken fallen dann mit N_1 und N_2 zusammen. Man bekommt in dieser Weise:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial\beta}{\partial x_1^0}\right)N_1 + \frac{\partial\gamma}{\partial x_1^0}N_2 &= n_1, \\ \frac{\partial\beta}{\partial x_2^0}N_1 + \left(1 + \frac{\partial\gamma}{\partial x_2^0}\right)N_2 &= n_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Da n_1 und n_2 mittelst (21) durch die osculirenden Elemente gegeben sind, so kann man also aus (22) die wahren mittleren Bewegungen als Functionen der osculirenden Elemente ausdrücken.

Beschränken wir uns auf die erste Potenz der Masse, hat man

$$n_1 = n_1^0 - \mu \sum \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_1^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

$$n_2 = n_2^0 - \mu \sum \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_2^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

wo $A_{ij}^{(1)}$ die Coefficienten in der gewöhnlichen Entwickelung der Störingsfunction bezeichnen.

Weiter ist dann

$$\beta = -\mu \sum{}' \frac{iA_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

$$\gamma = -\mu \sum{}' \frac{jA_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

und nach (22) mit derselben Annäherung:

$$N_1 = n_1 - n_1^0 \frac{\partial\beta}{\partial x_1^0} - n_2^0 \frac{\partial\gamma}{\partial x_1^0},$$

$$N_2 = n_2 - n_1^0 \frac{\partial\beta}{\partial x_2^0} - n_2^0 \frac{\partial\gamma}{\partial x_2^0},$$

Es ist aber

$$n_1^0 \frac{\partial\beta}{\partial x_1^0} + n_2^0 \frac{\partial\gamma}{\partial x_1^0} = -\mu \sum{}' \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_1^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0)$$
$$+ \mu \sum{}' \frac{A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \left(i\frac{\partial n_1^0}{\partial x_1^0} + j\frac{\partial n_2^0}{\partial x_1^0}\right) \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

$$n_1^0 \frac{\partial\beta}{\partial x_2^0} + n_2^0 \frac{\partial\gamma}{\partial x_2^0} = -\mu \sum{}' \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_2^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0)$$
$$+ \mu \sum{}' \frac{A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \left(i\frac{\partial n_1^0}{\partial x_2^0} + j\frac{\partial n_2^0}{\partial x_2^0}\right) \cos(iy_1^0 + jy_2^0),$$

so dass, in Hinsicht auf den Werth von n_1 und n_2 und bei Einfürung von B_{ij} statt A_{ij}

$$(23) \begin{cases} N_1 = n_1^0 - \mu \dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_1^0} - \mu \sum{}' B_{ij}^{(1)} \left(i\dfrac{\partial n_1^0}{\partial x_1^0} + j\dfrac{\partial n_2^0}{\partial x_1^0}\right) \cos(iy_1^0 + jy_2^0), \\ N_2 = n_2^0 - \mu \dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_2^0} - \mu \sum{}' B_{ij}^{(1)} \left(i\dfrac{\partial n_1^0}{\partial x_2^0} + j\dfrac{\partial n_2^0}{\partial x_2^0}\right) \cos(iy_1^0 + jy_2^0). \end{cases}$$

Im asteroidischen Drei-Körper-Problem hat man, bei geeigneter Wahl der canonischen Veränderlichen

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2),$$

so dass

$$n_1^0 = \frac{1}{x_1^{03}} - N, \quad n_2^0 = N,$$

und also hat man

$$\frac{\partial n_1^0}{\partial x_1^0} = -\frac{3}{x_1^{04}},$$

$$\frac{\partial n_1^0}{\partial x_2^0} = \frac{\partial n_2^0}{\partial x_1^0} = \frac{\partial n_2^0}{\partial x_2^0} = 0,$$

so dass die Ausdrücke für die wahren mittleren Bewegungen dann heissen:

$$(23^*) \begin{cases} N_1 = n_1^0 - N - \mu \dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_1^0} + \dfrac{3\mu}{x_1^{04}} \sum{}' i B_{ij}^{(1)} \cos(iy_1^0 + jy_2^0), \\ N_2 = n_2^0 - \mu \dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_2^0}. \end{cases}$$

Die Werthe von $\dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_1}$ und $\dfrac{\partial A_{00}^{(1)}}{\partial x_2}$ sind in (12) angegeben. Die Ausdrücke (23*) lassen sich aus (12) ableiten, indem man mittelst (11) — für $t = 0$ — x' gegen x^0 vertauscht.

Der Unterschied zwischen den wahren mittleren Bewegungen und den osculirenden kann offenbar unter Umständen, auch für kleine μ, bedeutend werden, besonders wenn kleine Divisoren niederen Grades vorkommen.

5. Die Anwendung der osculirenden mittleren Bewegungen in den Divisoren hat nicht nur den Vortheil, dass man in dieser Weise die Berechnung der Coefficienten in der Entwickelung der Störungsfunction direct ausführen kann, was unter Anwendung anderer mittleren Bewegungen nicht ohne Umwege geschehen kann, sondern sie hat auch den wichtigen Vorzug, dass man die Störungen der verschiedenen Ordnungen mittelst *convergenter* Ausdrücke erhalten kann.

Nimmt man auf die Werthe (19) der Integrationsconstanten Rücksicht, bekommt man in der That beispielsweise für x_1 den Ausdruck

$$(24) \quad x_1 = x_1^0 + \mu \Sigma' i B_{ij}^{(1)} [\cos(iy_1 + jy_2) - \cos(iy_1^0 + jy_2^0)],$$

wo nur die Störungen erster Ordnung mitgenommen worden sind.

In der Summe rechter Seite betrachten wir Glieder drei verschiedener Arten und setzen

$$\Sigma' i B_{ij} [\cos(iy_1 + jy_2) - \cos(iy_1^0 + jy_2^0)] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 .$$

In Σ_1 nehmen wir alle solchen Glieder auf, die bei einer (gedachten) numerischen Berechnung thatsächlich mitgenommen werden. Die Summe Σ_2 umfasst alle solchen Glieder, bei denen die kleinen Divisoren nicht unter eine bestimmte endliche untere Grenze sinken. Da die Summe ΣA_{ij} convergent gedacht wird, so kann also Σ_2, für beliebige y_1 und y_2, einen bestimmten endlichen Werth nicht überschreiten. Die Summe Σ_3 enthält also die s.g. critischen Glieder, die mit kleinen Divisoren verschiedenen Grades behaftet sind. Wir wollen zeigen, dass Σ_3, *für endliche Werthe der Zeit*, einen endlichen Werth nicht überschreiten kann.

Es ist in der That

$$\Sigma_3 = -\Sigma_3 \frac{2iA_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} \sin\left(i\frac{y_1 + y_1^0}{2} + \frac{y_2 + y_2^0}{2}\right) \sin\left(i\frac{y_1 - y_1^0}{2} + j\frac{y_2 - y_2^0}{2}\right).$$

Nun ist aber, für kleine Werthe der Zeit genähert

$$y_1 = y_1^0 + n_1^0 t ,$$
$$y_2 = y_2^0 + n_2^0 t ,$$

wo n_1^0 und n_2^0 die osculirenden mittleren Bewegungen bezeichnen, und folglich bekommt man für Σ_3 den genäherten Werth

$$(25) \qquad \Sigma_3 = -\mu t \Sigma_3 i A_{ij} \sin\left(i\frac{y_1 + y_1^0}{2} + j\frac{y_2 + y_2^0}{2}\right),$$

welcher endlich ist. Die kleinen Divisoren bewirken also nicht die Divergenz der Reihe für x_1 — wenigstens nicht für kleine Werthe der Zeit — dagegen sehen wir, dass die Wirkung dieser Glieder dieselbe ist als ob in x_1 und x_2 *seculare* Glieder vorhanden wären. Ist die numerische Rechnung nicht genügend umfassend, so dass critische Glieder niederen Grades in Σ_3 vorkommen, so wird der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung sich bald als proprotional der Zeit zeigen. Ist die numerische Rechnung hinreichend ausführlich, werden die kleinen Divisoren sich erst nach Hunderten oder Tausenden von Jahren merkbar machen.

Führen wir in y_1 die Werthe der Integrationsconstante ein, so bekommt man

$$(26)\qquad \begin{aligned} n_1 t + c_1 = y_1 + \Sigma \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_1^0}[\sin(iy_1 + jy_2) - \sin(iy_1 + jy_2)] \\ - \Sigma \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_1^0} \cos(iy_1^0 + jy_2^0)[iy_1 + jy_2 - \overline{iy_1^0 + jy_2^0}]. \end{aligned}$$

Wird hier dieselbe Eintheilung der Glieder gemacht, so findet sich, dass Σ_3 hier proportional der *zweiten* Potenz der Zeit wächst.[1] Die kleinen Divisoren bewirken also, dass der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung, in Bezug auf y_1 und y_2, proportional der zweiten Potenz der Zeit wächst, oder wenigstens wachsen kann. Ist die Summe

$$\Sigma B_{ij} \text{ bez. } \Sigma \frac{\partial B_{ij}}{\partial x}$$

convergent, so muss offenbar auch Σ_3 immer unterhalb einer endlichen Grenzen bleiben.

Die obigen Betrachtungen beziehen sich nur auf die Störungen erster Ordnung. In Bezug auf die Störungen höherer Ordnung gelten indessen ähnliche Schlussfolgerungen, nur dass hier höhere Potensen von t (oder richtiger von μt) zum Vorschein kommen.

6. Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung (1) erlaubt, wie wir gesehen haben, eine grosse Freiheit in der Wahl der Integrationsconstanten. Ich will zuletzt noch eine solche Wahl erwähnen, die bei einer *systematischen* Berechnung der Störungen der kleinen Planeten von grosser Bedeutung ist.

In der Methode von Bohlin werden bekanntlich die Störungen einer Gruppe Planeten an bestimmte Werthe der Integrationsconstanten angeknüpft, für welche die mittleren Bewegungen der Planeten eben commensurabel sind. Es ist indessen keineswegs nothwendig, solche Gruppenstörungen an eine Commensurabilitätsstelle anzuschliessen, sondern man kann ebenso wohl von ganz beliebigen Werthen der Elemente ausgehen und an denselben die Störungen einer Gruppe Planeten anschliessen. Es ist sogar im Allgemeinen vortheil-

[1] Man vergleiche den Aufsatz des Verfassers in A. N. N:o 2913 (1889).

hafter eine Nicht-Commensurabilitätsstelle zu wählen, da man dann die Funktion S nach Potenzen von μ, und nicht von $\sqrt{\mu}$, entwickeln kann. Ich werde die dies bezüglichen Formeln aus einander setzen.

In (1) setzen wir

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots$$
$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots$$

und erhalten zuerst

$$F_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C_0,$$

welche giebt

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Weiter hat man

$$n_1^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1(x_1^0, x_2^0; y_1, y_2) + C_1,$$

eine Gleichung, deren Integral wir in der Form

$$S_1 = \beta y_1 + \gamma y_2 + \textit{periodische Function von } y_1 \textit{ und } y_2$$

schreiben.

Wir können nun den beiden Constanten x_1^0 und x_2^0 beliebige numerische Werthe zuertheilen und β und γ *als Integrationsconstanten betrachten.* Practisch genommen, setzt dies offenbar voraus, dass man den Grössen β und γ nicht allzu grosse Werthe giebt.

Für C_1 wird ein solcher Werth gewählt, dass

$$n_1^0 \beta_1 + n_2^0 \gamma_1 = [F_1] + C_1$$

ist.

Die Bestimmung von S_2, S_3 u. s. w. geschieht dann in gewöhnlicher Weise, etwa nach den Formel (3*), und man kann jedesmal die S_p ($p \geqq 2$) in rein trigonometrischer Form schreiben.

Da es bisweilen nothwendig wird die Glieder zweiter Ordnung zu berücksichtigen, wollen wir die Differentialgleichung für S_2 betrachten. Man hat

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)^2\right\}$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\frac{\partial S_1}{\partial y_2} + F_2.$$

Im asteroidischen Problem ist

$$F_2 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} = 0;$$

so dass

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2} F_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\frac{\partial S_1}{\partial y_2}$$

ist. Schreiben wir

$$F_1 = \Sigma A_{ij} \cos(iy_1 + jy_2),$$

so ist

$$S_1 = \beta y_1 + \gamma y_2 + \Sigma' \frac{A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \sin(iy_1 + jy_2),$$

wo $A_{ij}^{(1)}$ die Werthe von A_{ij} für $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ bezeichnen.

Man hat also

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_1} = \beta + \Sigma' \frac{iA_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos(iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_2} = \gamma + \Sigma' \frac{jA_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos(iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \Sigma \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_1} \cos(iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \Sigma \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_2} \cos(iy_1 + jy_2).$$

Wir bemerken, dass Φ_2 eine Function zweiten Grades in β und γ ist. Da wir indessen die Constante C_2 so bestimmen wollen, dass die constanten Glieder in $\Phi_2 + C_2$ verschwinden, so erscheint S_2 also als eine lineare Function von β und γ von der Form

$$S_2 = T^{(1)} + \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)},$$

und hier ist

$$T^{(2)} = \Sigma' \left[\frac{F_0'' i A_{ij}^{(1)}}{in_1^0 + jn_2^0} + \frac{\partial A_{ij}^{(1)}}{\partial x_1^0}\right] \cos(iy_1 + jy_2)$$

$$T^{(3)} = \Sigma \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2^0} \cos(iy_1 + jy_2).$$

In denjenigen Fällen, wo man bei einer directen Berechnung der Störungen die Störungen zweiter Ordnung nicht zu berücksichtigen braucht, ist es erlaubt $T^{(1)}$ — welche Function ziemlich mühsam zu berechnen ist — zu vernachlässigen und

$$S_2 = \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)}$$

zu setzen.



Tryckt den 29 juli 1904.

Stockholm 1904. Kungl. Boktryckeriet.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 2. N:O 8.

ÜBER DAS FEHLERGESETZ

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE H. LE SOUDIER
174 BOULEVARD S:T GERMAIN

1905

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 2. N:o 8.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

NC

Über das Fehlergesetz.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mitgeteilt am 12. April 1905.

Unter den vielen Ableitungen des Fehlergesetzes die von verschiedener Seite versucht worden sind, steht die Behandlung, welche LAPLACE diesem Problem gegeben hat, ohne Vergleich in der ersten Linie. Seine Voraussetzungen sind sehr allgemein gehalten, und lassen sich ohne das Grundprinzip LAPLACE's zu verlassen noch allgemeiner formulieren, seine mathematische Behandlung des Problems ist äusserst genial und ist dem Grundleger der wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitstheorie durchaus würdig. Es ist deswegen mit einer gewissen Erstaunung man findet, dass die Auseinandersetzungen von LAPLACE über dies Problem so wenig Aufmerksamkeit unter den Mathematikern und den Astronomen gefunden hat.

Eine Erklärung dieser sonderbaren Erscheinung könnte man in der weniger durchsichtigen Darstellungsweise LAPLACE's über diese Fragen suchen, die das Lesen seiner Fehlertheorie sehr mühsam macht. Nicht ohne Recht bemerkt TODHUNTER in seiner »History of the Theory of Probability», dass »the fourth chapter of Laplace's work is the most important, and perhaps the most difficult». Ich weiss aus eigener Erfahrung, dass das Studium der Laplace'schen Fehlertheorie viel Nachsinnen und viel Zeit in Anspruch nimmt. Ein anderer Umstand, der das Verständnis der Laplace'schen Untersuchungen über diese Frage erschwert, ist der Mangel

an nötigen Convergenzuntersuchungen in vielen wichtigen Punkten. Um so angelegener würde es den Mathematikern sein diese Lücken auszufüllen!

In den folgenden Zeilen will ich den Versuch machen den Gedankengang der Laplace'schen Fehlertheorie wiederzugeben und gleichzeitig die Folgerungen aus dieser Theorie in ihrer allgemeinster Form zu ziehen, damit die Form der Fehlerfunktion in ihrer allgemeinster Fassung übersichtlich dargestellt wird.

Der Ausgangspunkt ist insofern von der LAPLACE'chen verschieden, als ich von der HAGEN'schen Theorie der *Elementarfehler* ausgehe. Dies bewirkt aber keine wesentliche Veränderung der Problemstellung.

Ich setze also voraus, dass der Beobachtungsfehler durch Summation einer grossen Zahl Elementarfehler hervorgegangen ist. Diese Elementarfehler mögen aus s verschiedenen Quellen stammen, eine jede mit ihrem besonderen Fehlergesetz.

Die Fehler verteilen wir in Gruppen mit konstanter Ausdehnung $-\alpha-$ und nehmen an, dass alle Fehler in einer solchen Gruppe von gleicher Grösse sind. Diese Voraussetzung ist um so richtiger, je kleiner das Intervall α gemacht wird. Indem wir mit m eine ganze Zahl bezeichnen, sind also sämmtliche Fehler zwischen $m\alpha - \frac{1}{2}\alpha$ und $m\alpha + \frac{1}{2}\alpha$ von der Grösse $m\alpha$. Die relative Frequenz des Fehlers $m\alpha$ bei der Fehlerquelle Q_i ist der Grösse des Intervalles α proportional und ist ausserdem von m abhängig. Wir können also diese Frequenz oder *die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers* $m\alpha$ bei der Fehlerquelle Q_i mit

$$\alpha f_i(m\alpha)$$

bezeichnen, wo $f_i(x)$ eine vorläufig völlig unbekannte Funktion von x bedeutet. Über die Funktion $f_i(x)$ wird nur die Voraussetzung gemacht, dass sie für einen hinreichend grossen positiven und negativen Wert von x beliebig wenig von Null verschieden ist. Ausserdem hat man

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha f_i(m\alpha) = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich der Einheit ist.

Betrachten wir nun die Summe

$$P_i = \alpha \{f_i(0) + f_i(\alpha)e^{\alpha\omega\sqrt{-1}} + f_i(2\alpha)e^{2\alpha\omega\sqrt{-1}} + \cdots + f_i(-\alpha)e^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} + f_i(-2\alpha)e^{-2\alpha\omega\sqrt{-1}} + \cdots\},$$

so ist, der Voraussetzung gemäss, der Koeffizient von $e^{m\alpha\omega\sqrt{-1}}$ in diesem Ausdrucke gleich der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $m\alpha$.

Ist nun Q_j eine andere Fehlerquelle, bei welcher die relative Freqvenz des Fehlers $m\alpha$ durch

$$\alpha f_j(m\alpha)$$

ausgedrückt wird, und setzt man

$$P_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha f_j(m\alpha) e^{m\alpha\omega\sqrt{-1}}$$

so ist auch hier der Koefficient von $e^{m\alpha\omega\sqrt{-1}}$ gleich der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $m\alpha$ bei der Fehlerquelle Q_j.

Nimmt man das Produkt

$$P_i P_j,$$

so findet man nach einem bekannten Satz in der Wahrscheinlichkeitstheorie, dass der Koeffizient von $e^{m\alpha\omega\sqrt{-1}}$ in der Entwickelung dieses Produktes gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass die *Summe* eines aus Q_i und eines aus Q_j stammenden Fehlers gleich $m\alpha$ ist.

Bei s Fehlerquellen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ drückt in derselben Weise der Koefficient von $e^{m\alpha\omega\sqrt{-1}}$ in der Entwickelung des Produktes

$$P_1 P_2 \ldots P_s$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass die *Summe* je eines Fehlers aus den s Fehlerquellen gleich $m\alpha$ ist.

Nach dem Theorem von FOURIER ist aber dieser Koeffizient durch das Integral

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; . \; A_{m\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_1 P_2 \ldots P_s e^{-m\alpha\omega\sqrt{-1}}\, \alpha d\omega$$

gegeben.

Wir lassen nun α gegen Null abnehmen, und setzen $z = m\alpha$ (wobei $dz = \alpha$ wird), und erhalten dann

$$(3^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P_i = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_i(x) e^{x\omega\sqrt{-1}},$$

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_z = \frac{dz}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega P_1 P_2 \ldots P_s e^{-z\omega\sqrt{-1}},$$

wo nunmehr A_z die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass die Summe der s Elementarfehler zwischen z und $z + dz$ fällt.

Die Formeln (3) und (3*) stellen das Hauptproblem der Fehlertheorie in sehr zusammengedrängter mathematischen Form dar. Die weitere Behandlung ist ein Problem aus der Funktionenlehre. Die grösste Schwierigkeit in dieser Behandlung liegt in dem Umstande, dass $f_i(x)$ eine *unbekannte* Funktion von x bezeichnet. Gerade hierin liegt das eigentümliche und epochemachende in der LAPLACE'schen Untersuchung.

Da nach (1)

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_i(x) = 1$$

ist, so findet man, dass der Modulus von P_i für $\omega = 0$ sein Maximum hat, und dass er für alle andere Werte von ω kleiner als die Einheit ist. Wenn s eine grosse Zahl bezeichnet, was hier vorausgesetzt wird, so wird also der Modulus des Produktes

$$P_1 P_2 \ldots P_s$$

sehr klein, wenn ω nicht einen Wert hat, der nahe gleich Null ist. Ist beispielsweise $s = 100$, und P_i durchschnittlich gleich 0.9, so ist dies Produkt gleich

$$(0.9)^{100} = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{100} = \frac{1}{e^{10}}$$

und also schon bei diesem Wert von P eine sehr kleine Zahl.

Auf Erwägungen solcher Art beruht die Integrationsmethode von LAPLACE. Die Beweisführung ist offenbar nicht stichhaltig. Es kann nämlich vorkommen, und kommt tat-

sächlich vor, dass P_i andere Maxima als $\omega = 0$ hat, und wenn die Werte von P_i in diesen Maxima so nahe der Einheit sind, dass das Produkt $P_1 P_2 \ldots P_s$ merkbare Werte annimmt, so ist eine mehr eingehende Behandlung des Integrales notwendig. LAPLACE hat auch für einen besonderen Fall eine solche detaillierte Untersuchung gemacht, nämlich für $f(x) =$ Konstans, so dass alle (Elementar-)Fehler gleich wahrscheinlich sind, in welchem Falle es natürlich notwendig wird eine obere Grenze für den Fehler zu bestimmen. LAPLACE zeigt, dass es hinreichend ist für den betreffenden Fall das Maximum $\omega = 0$ zu betrachten, und dass die übrigen Maxima der Funktion $P(\omega)$ von keiner Bedeutung sind. Wenn er eine ähnliche Untersuchung in anderen Fällen unterlassen hat, so darf man wohl vermuten, dass er hierbei von der Erwägung geleitet worden ist, dass das für eine unveränderliche $f(x)$ erhaltene Resultat *a fortiori* Gültigkeit hat, wenn $f(x)$ bei wachsenden x, in positiver oder negativer Richtung, gegen Null abnimmt. Die Sache ist indessen von so grosser Wichtigkeit, dass sie wohl verdient eingehend untersucht zu werden.

Angenommen, dass die sekundären Maxima vernachlässigt werden können, geschieht die weitere Behandlung der Integrale (3) und (3*) in folgender Weise.

Zuerst hat man, wenn die Indices (i) der Kürze wegen ausgeschlossen werden,

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \cos x\omega + \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \sin x\omega .$$

Schreibt man

$$P = \rho e^{\psi \sqrt{-1}}$$

erhält man also

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \rho \cos \psi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \cos x\omega , \\ \rho \sin \psi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \sin x\omega , \end{cases}$$

aus welchen Formeln wir ρ und ψ als Funktionen von ω darstellen wollen.

Für kleine Werte von ω, auf welche es hier — der Voraussetzung nach — allein ankommt, können die rechten Seiten von (5) nach Potenzen von ω entwickelt werden. Führen wir die Bezeichnungen

$$(6) \quad \nu_r^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^r f_i(x)$$

ein, und bemerken, dass, nach (4), $\nu_0 = 1$ ist, so erhalten wir

$$\rho \cos \psi = 1 - \frac{\nu_2}{\underline{|2}} \omega^2 + \frac{\nu_4}{\underline{|4}} \omega^4 - \cdots,$$

$$\rho \sin \psi = \nu_1 \omega - \frac{\nu_3}{\underline{|3}} \omega^3 + \cdots,$$

woraus die folgenden Entwickelungen von ρ^2 und ψ abgeleitet werden:

$$(7) \quad \begin{cases} \rho^2 = 1 - (\nu_2 - \nu_1^2)\omega^2 + \left(\frac{\nu_2^2}{4} + \frac{\nu_4}{12} - \frac{\nu_1 \nu_3}{3}\right)\omega^4 - \cdots \\ \psi = \nu_1 \omega - \left(\frac{\nu_3}{\underline{|3}} - \frac{\nu_1 \nu_2}{\underline{|2}} + \frac{\nu_1^3}{3}\right)\omega^3 + \cdots \end{cases}$$

Wir erhalten also, wenn wir die Indices wieder einführen

$$P_1 P_2 \ldots P_s = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s e^{\Sigma \psi_i \sqrt{-1}}.$$

Aus (7) bekommt man aber

$$\log \rho_1 = \frac{1}{2} \log \left[1 - (\nu_2 - \nu_1^2)\omega^2 + \left(\frac{\nu_2^2}{4} + \frac{\nu_4}{12} - \frac{\nu_1 \nu_3}{3}\right)\omega^4 - \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1^2)\omega^2 + (\nu_4 - 3\nu_2^2 + 12\nu_2\nu_1^2 - 4\nu_1\nu_3 - 6\nu_1^4)\frac{\omega^4}{24} - \cdots$$

so dass

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s = e^{-\frac{\omega^2}{2}\Sigma(\nu_2 - \nu_1^2) + \frac{\omega^4}{24}\Sigma(\nu_4 - 3\nu_2^2 + 12\nu_2\nu_1^2 - 4\nu_1\nu_3 - 6\nu_1^4) - \cdots}$$

welche Gleichung wir in der Form

$$(8) \quad \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} [1 + \gamma_4 \omega^4 + \gamma_6 \omega^6 + \cdots]$$

schreiben, wo

(9) . . . . $\sigma^2 = \sum(\nu_2^{(i)} - \nu_1^{(i)2})$,

(9*) . . $\gamma_4 = \frac{1}{24}\sum(\nu_4^{(i)} - 3\nu_2^{(i)2} + 12\nu_2^{(i)}\nu_1^{(i)2} - 4\nu_1^{(i)}\nu_3^{(i)} - 6\nu_1^{(i)4})$.

Die form (8) für das Produkt $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s$ ist gewählt um das rasche Abnehmen dieses Produktes mit wachsendem ω zum Ausdruck zu geben. Beispielsweise will ich bemerken, dass man statt (8) auch die Form

(10) . . $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s = \frac{2}{e^{\sigma\omega} + e^{-\sigma\omega}}[1 + \delta_4\omega_4 + \delta_6\omega^6 + \cdots]$

wählen könnte.

Aus (3) erhalten wir nun

$$A_z = \frac{dz}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega\, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s e^{(\Sigma\psi_i - z\omega)\sqrt{-1}}.$$

Da aber ψ_i eine ungerade Funktion von ω ist können wir auch schreiben

(11) . . . . $A_z = \frac{dz}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega\, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s \cos[\Sigma\psi_i - z\omega]$.

Setzt man noch

(12) . . . . . $\begin{cases} \lambda = \sum \nu_1^{(i)} \\ \gamma_3 = \sum\left(\frac{\nu_3^{(i)}}{\lfloor 3} - \frac{\nu_1^{(i)}\nu_2^{(i)}}{\lfloor 2} + \frac{\nu_1^{(i)3}}{3}\right), \end{cases}$

so erhält man

$$\cos[\Sigma\psi_i - z\omega] = \cos(\lambda - z)\omega + \gamma_3\omega^3 \sin(\lambda - z)\omega + \gamma_5\omega^5 \cos(\lambda - z)\omega + \cdots$$

und folglich erhält man

$$A_z = \frac{dz}{\pi}\int_0^{\pi} d\omega\, e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}[\cos(\lambda - z)\omega + \gamma_3\omega^3 \sin(\lambda - z)\omega + \gamma_4\omega^4 \cos(\lambda - z)\omega + \cdots].$$

Nun ist aber, wie LAPLACE zuerst gezeigt hat,

$$(13) \ldots \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{2\sigma^2}}.$$

Der Voraussetzung nach hat man nur sehr kleine Werke von ω in Betracht zu nehmen. Wir können deswegen die Annahme machen, dass die obere Grenze in (13) gleich π ist.

Wird die rechte Seite dieser Gleichung mit $\varphi(z)$ bezeichnet, so dass

$$(14) \ldots\ldots \varphi(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

ist, so erhält man, indem man die Gleichung (13) nach z differentiiert,

$$(15) \ldots \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega\, d\omega e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \sin(\lambda - z)\omega = \varphi'(z). \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega^2 d\omega e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega = -\varphi''(z), \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega^3 d\omega e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \sin(\lambda - z)\omega = -\varphi'''(z), \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega^4 d\omega e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega = \varphi^{IV}(z), \end{cases}$$

u. s. w.

Wir erhalten also schliesslich

$$(16) \ldots A_z = dz[\varphi(z) - \gamma_3\varphi'''(z) + \gamma_4\varphi^{IV}(z) + \cdots],$$

welches also den allgemeinsten Ausdruck gibt für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von s Elementarfehlern zwischen z *und* $z + dz$ *gelegen ist.*

Zu der Formel (16) wird man also durch eine konsequente Entwickelung der LAPLACE'schen Fehlertheorie geführt. Man findet, dass diese Wahrscheinlichkeit, durch eine Reihe dargestellt wird, die nach den successiven Differentialquotienten der Funktion $\varphi(z)$ fortschreitet und wo die mit dem ersten und dem zweiten Differentialquotienten multiplizierten Glieder wegfallen. Die Funktion $\varphi(z)$ ist die gewöhnliche s. g. Wahrscheinlichkeitsfunktion und die mittlere Abweichung ist durch (9) gegeben.

Seit einiger Zeit hat man gewusst, dass beliebige Frequenzkurven durch Reihen von der Form (16) dargestellt werden können. Es ist deswegen von besonderem Interesse zu finden, dass diese Form ungezwungen aus der LAPLACE'schen Fehlertheorie gefolgert werden kann.



Tryckt den 31 maj 1905.

Uppsala 1905. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 2. N:O 15.

DIE ZWEITE FORM DES FEHLERGESETZES

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE H. LE SOUDIER
174 BOULEVARD S:T GERMAIN

1905

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 2. N:o 15.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

NO 26

Die zweite Form des Fehlergesetzes.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mitgeteilt am 7. Juni 1905.

Die Form für das Fehlergesetz, die ich in meinem Aufsatz vom 12. April dieses Jahres abgeleitet habe, ist nicht immer gültig. Wie ausdrücklich betont wurde hängt die Beweisführung wesentlich davon ab, dass bei der Berechnung des Integrales (3) nur kleine Werte von ω in Betracht kommen können. Im Allgemeinen ist dies auch der Fall. Es gibt indessen einen Fall, in welchem diese Voraussetzung nicht mehr Gültigkeit hat. Das Fehlergesetz nimmt dann eine ganz andere Form an. Die GAUSSische Fehlerfunktion gibt dann nicht länger eine genäherte Darstellung der Verteilung der Fehler, sondern diese Verteilung geschieht nach einem Fehlergesetze von ganz anderer Form. Ich werde diese als die *zweite Form* oder die *Form B* das Fehlergesetzes bezeichnen, wogegen das Fehlergesetz (16), das am häufigsten vorkommt, als die *Form A* oder die *Normalform* des Fehlergesetzes bezeichnet wird.

Indem die Zahl s der Fehlerquellen als sehr gross angenommen wurde, brauchen nur solche Werte von ω in Betracht gezogen zu werden, für welche die Grössen $P_1, P_2, \ldots, P_s$ (man vergleiche meinen Aufsatz über das Fehlergesetz) sehr nahe gleich der Einheit sind. Dies ist für sehr kleine ω immer der Fall. Betrachten wir aber die Form von P_i

$$(1)\quad \begin{cases} P_i = \alpha \{ f_i(0) + f_i(\alpha) e^{\alpha\omega\sqrt{-1}} + f_i(2\alpha) e^{2\alpha\omega\sqrt{-1}} + \cdots \\ \qquad + f_i(-\alpha) e^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} + f_i(-2\alpha) e^{-2\alpha\omega\sqrt{-1}} + \cdots \} \end{cases}$$

und beachten, dass die Summe der Koeffizenten in dieser Reihe gleich Eins ist, so findet man, dass P_i unter Umständen *für alle Werte von* ω nahe gleich der Einheit sein kann, wenn nämlich

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} f_i(\alpha), & f_i(2\alpha), \ldots \\ f_i(-\alpha), & f_i(-2\alpha), \ldots \end{cases}$$

sämtlich sehr klein sind und also $\alpha f_i(0)$ *nahe gleich Eins ist.* In diesem Falle ist es nicht mehr hinreichend sehr kleine Werte von ω in Betracht zu ziehen, und die Auseinandersetzungen des vorigen Aufsatzes verlieren hierdurch ihre Gültigkeit.

Statt der Entwickelung nach Potenzen von ω kann man indessen hier, eine Entwickelung nach Potenzen der Grössen (2) benutzen.

Ich fange mit dem Falle an, dass in (1) nur zwei Glieder vorkommen. Das Problem, das man zu lösen hat, lautet nun folgendermaassen.

Bei jeder Fehlerquelle seien nur zwei Fehler möglich: der Fehler Null und der Fehler α. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers α ist sehr klein, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null also sehr nahe der Einheit. Bei s Fehlerquellen können also die Fehler $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, s\alpha$ vorkommen. Es fragt sich nach der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers gleich $r\alpha$.

Es sei p_i die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null bei der Fehlerquelle Q_i, und q_i die Wahrscheinlichkeit des Fehlers α. Man hat

$$p_i + q_i = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers gleich $r\alpha$ wird dann erhalten, wenn man im Produkt

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \Pi = \prod_{i=1}^{s} (p_i + q_i e^{\alpha\omega\sqrt{-1}})$$

den Koeffizienten von $e^{r\alpha\omega\sqrt{-1}}$ aufsucht.

Das Produkt (3) kann man zwar nach Potenzen von q entwickeln. Da indessen die Zahl der Faktoren, der Annahme nach, sehr gross ist, so wird die Konvergenz dieser Entwickelung sehr schwach. Man verfährt deswegen besser, wenn man (3) in folgender Form schreibt

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Pi = e^{\sum_{i=1}^{s} \log (p_i + q_i e^{\alpha\omega\sqrt{-1}})}$$

und den Exponenten nach Potenzen von q entwickelt.

Den Unterschied in der Konvergenz dieser beiden Entwickelungen findet man leicht, wenn man $p_1 = p_2 = \cdots = p_s$, und also auch $q_1 = q_2 = \cdots = q_s$, setzt. Die Entwickelung von (3) geschieht dann näherungsweise wie eine Entwickelung nach Potenzen von sq, wogegen in der Entwickelung des Exponenten in (4) die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von q — von dem gemeinsamen Faktor s abgesehen — sämtlich kleiner als die Einheit sind. Wir werden hier zwar annehmen, dass sq keine grosse Zahl ist, es wird aber nicht notwendig vorauszusetzen, dass sq eine sehr kleine Zahl ist. Wie werden in der Tat nur die Annahme machen, dass sq^2 eine kleine Zahl ist.

Führen wir die GAUSSische Bezeichnung

$$[a] = a_1 + a_2 + \cdots a_s,$$

ein, so hat man also

$$(4^*) \quad \ldots \quad \Pi = e^{[\log p] + \left[\frac{q}{p}\right] e^{\alpha\omega\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{p^2}\right] e^{2\alpha\omega\sqrt{-1}} + \cdots}$$

Beachtet man, dass

$$p = 1 - q$$

ist, und also

$$\log p = -\left[q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \cdots\right],$$

und wenn man noch die Glieder der Ordnung $[q^2]$ vernachlässigt, so erhält man *näherungsweise:*

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Pi = e^{-[q] + [q] e^{\alpha\omega\sqrt{-1}}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $A_{r\alpha}$ eines Beobachtungsfehler vom Betrag $r\alpha$ ist

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_{r\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Pi e^{-r\alpha\omega\sqrt{-1}} d\omega,$$

und also nach Einführung des Ausdruckes (5)

$$A_{r\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega e^{-[q]+[q]\cos\alpha\omega+\sqrt{-1}([q]\sin\alpha\omega - r\alpha\omega)}$$

oder

$$(6^*) \quad A_{r\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-[q]+[q]\cos\alpha\omega} \cos\left\{[q]\sin\alpha\omega - r\alpha\omega\right\} d\omega.$$

Dies ist die Funktion, die in diesem Falle eine ähnliche Rolle spielt, wie die GAUSSische Fehlerfunktion in der gewöhnlichen Fehlertheorie.

Wir können $\alpha = 1$ setzen, und wenn wir ausserdem die Bezeichnung

$$\lambda = [q]$$

einführen, so werden wir zur Betrachtung der folgender Funktion geführt.

$$(7) \quad . \; . \; . \quad \psi(z) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos\omega} \cos[\lambda\sin\omega - z\omega] d\omega.$$

Will man die Abhängigkeit der Funktion ψ vom Parameter λ zum Ausdruck bringen, so schreiben wir $\psi_\lambda(z)$.

Durch (7) ist $\psi(z)$ definiert als Funktion von z nicht nur für ganze Werte von z, sondern für beliebige reelle oder imaginäre Werte des Argumentes. Die Funktion $\psi(z)$ ist eine ganze transcendente Funktion von z, die also in eine immer konvergierende Potenzreihe entwickelt werden kann. Dies folgt direkt aus der Definition (7), lässt sich aber besser in der folgenden Weise ableiten.

Als Funktion von λ betrachtet, ist $\psi_\lambda(z)$ auch eine Funktion, die keine singularen Stellen in endlicher Entfernung

besitzt. Wir werden die Koeffizienten in der immer konvergierenden Entwickelung

$$\psi_\lambda(z) = \psi_0(z) + \frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda}\cdot\lambda + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\lambda}\frac{\lambda^2}{\underline{|2}} + \cdots$$

bestimmen.

Man findet

$$\frac{\partial\psi_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \psi_\lambda(z-1) - \psi_\lambda(z) = -\Delta\psi_\lambda(z)$$

$$\frac{\partial^2\psi_\lambda(z)}{\partial\lambda^2} = \Delta^2\psi_\lambda(z)$$

. . . .

so dass

$$\psi_\lambda(z) = \psi_0(z) - \frac{\lambda}{\underline{|1}}\Delta\psi_0(z) + \frac{\lambda^2}{\underline{|2}}\Delta^2\psi_0(z) - \frac{\lambda^3}{\underline{|3}}\Delta^3\psi_0(z) + \cdots$$

ist. Die Ausdrücke für $\psi_0(z)$ und ihre Differenzen sind leicht zu erhalten. Es empfiehlt sich indessen, einen etwas verschiedenen Weg einzuschlagen.

Statt der Funktion $\psi_\lambda(z)$ selbst wollen wir nämlich die Funktion

$$f_\lambda(z) = e^\lambda\psi_\lambda(z)$$

betrachten.

Man erhält

$$\frac{\partial f_\lambda(z)}{\partial\lambda} = f(z-1)$$

$$\frac{\partial^2 f_\lambda(z)}{\partial\lambda^2} = f(z-2)$$

u. s. w.

und, führt man wieder die Funktion ψ ein, hat man also die Entwickelung

$$\psi_\lambda(z) = e^{-\lambda}\left\{\psi_0(z) + \frac{\lambda}{\underline{|1}}\psi_0(z-1) + \frac{\lambda^2}{\underline{|2}}\psi_0(z-2) + \cdots\right\}$$

Es ist aber

$$\psi_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos z\omega d\omega = \frac{\sin z\pi}{z\pi}$$

also

$$\psi_0(z-r) = (-1)^r \frac{\sin z\pi}{\pi(z-r)},$$

und folglich erhalten wir die Entwickelung

$$(8) \quad \psi_\lambda(z) = \frac{e^{-\lambda} \sin z\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{\lambda}{\underline{|1}\,(z-1)} + \frac{\lambda^2}{\underline{|2}\,(z-2)} - \frac{\lambda^3}{\underline{|3}\,(z-3)} + \cdots \right\}$$

eine Formel, welche die Eigenschaften der Funktion ψ in übersichtlicher Weise wiedergibt.

Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind die folgenden:

1) *Die Funktion* $\psi_\lambda(z)$ *wird für keinen endlichen Wert von* λ *oder* z *unendlich:*

2) *Die Funktion* $\psi(z)$ *verschwindet für* $z = -1, -2, -3,$ *u. s. w.* Ob sie auch für andere Werthe von z verschwindet ist für die Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht nötig zu untersuchen;

3) *Its* z *eine ganze positive Zahl* r *oder Null, hat* $\psi(z)$ *die folgende einfache Form:*

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \psi(r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{\underline{|r}}.$$

Wird in (9) die Fakultät $\underline{|r}$ gegen die Γ-Funktion vertauscht, so erhält man also eine Relation zwischen dieser Funktion und $\psi(z)$ für ganze positive Werte von z. Es ist möglich, dass diese Relation auch für andere z-Werte besteht. Es ist aber nicht notwendig diese Frage, die ja sonst interessant wäre, zu untersuchen, da die Reihe (8) alles aussagt, was man hier über die Funktion $\psi(z)$ zu kennen braucht.

Aus (9) erhält man, wenn man noch in Betracht zieht, dass $\psi(z)$ für alle ganzen *negativen* Zahlenwerte verschwindet, die Formel

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \psi(r) = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\underline{|r}} = 1.$$

Die ψ-Funktion besitzt also die Eigenschaft, dass die Summe aller durch sie ausgedrückten Wahrscheinlichkeiten gleich der Einheit ist. Sie hat in dieser Hinsicht dieselbe

Eigenschaft wie die Funktion A_r [Formel (6)], welche die genauen Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten gibt. Ähnlich ist bekanntlich der Fall mit der GAUSSischen Fehlerfunktion, wenn das Fehlergesetz von der Normalform ist.

Bei dem Theorem von BERNOULLI muss man den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses sehr klein ist, besonders behandeln. POISSON hat in seinem »Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung» (deutsche Ausgabe S. 172) gezeigt, dass man dabei zur Formel (9) geführt wird. In der Abhandlung »Das Gesetz der kleinen Zahlen» hat BORTKEWITSCH mehrere interessante Anwendungen derselben auf die Statistik gemacht.

Die Funktion $\psi(z)$ gibt nur einen genäherten Wert der Wahrscheinlichkeit, deren genaue Wert durch die Formel (6) ausgedrückt wird. Das Integral (6) kan durch eine Reihe von ψ-Funktionen dargestellt werden.

Die Glieder in Π [Formel (4*)], die im Ausdrucke (6*) vernachlässigt worden sind, haben in der Tat sämtlich — von einem konstanten Faktor abgesehen — die Form

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-\lambda+\lambda e^{\omega\sqrt{-1}}-\sqrt{-1}z\omega} \times e^{m\omega\sqrt{-1}} = \psi_\lambda(z-m)$$

und folglich kann der vollständige Ausdruck für A_r in der Form

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_r = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_m \psi_\lambda(z-m)$$

geschrieben werden, oder auch in der Form

$$(10^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_r = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \Delta^m \psi,$$

wo $\Delta\psi$, $\Delta^2\psi$, $\Delta^3\psi$ u. s. w. die successiven Differenzen der Funktion $\psi(z)$ bezeichnen.

Was die Konvergenz dieser Reihen betrifft hat es keine Schwierigkeit zu beweisen, dass sie *wenigstens* halbkonvergent sind.

Die obige Auseinandersetzung bezieht sich auf den Fall, dass bei jeder Fehlerquelle nur zwei Fehler möglich sind: der Fehler Null und der Fehler α. Können bei jeder Fehlerquelle Fehler von beliebiger Grösse vorkommen, stellt sich die Untersuchung schwieriger als bei dem Fehlergesetz vom Typus A. Lassen sich aber die möglichen Fehler als Vielfachen eines einzigen Elementarfehlers ansehen, so kann das Problem in derselben Weise wie oben behandelt und gelöst werden. Das Resultat wird auch ganz ähnlicher Form: Die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers $z\alpha$ wird durch eine Reihe von der Form (10) oder (10*) ausgedrückt. Die Konvergenzfrage wird sich aber hier etwas komplizierter gestalten, da man die Form der Fehlerfunktion für jede Fehlerquelle in Betracht ziehen muss.



Tryckt den 23 augusti 1905.

Uppsala 1905. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 2. N:O 20.

ÜBER DIE DARSTELLUNG WILLKÜRLICHER FUNKTIONEN

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN	LONDON	PARIS
R. FRIEDLÄNDER & SOHN	WILLIAM WESLEY & SON	LIBRAIRIE H. LE SOUDIER
11 CARLSTRASSE	28 ESSEX STREET. STRAND	174 BOULEVARD S:T GERMAIN

1905

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 2. N:o 20.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

NO 27

Über die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Eingereicht am 13. September 1905.

Nachstehend werde ich eine Methode skizzieren, die es erlaubt, in sehr allgemeiner Weise reelle Funktionen durch Reihen darzustellen. Die Funktionen können entweder in analytischer Weise definiert sein oder auch für reelle Werte des Arguments willkürliche Werte annehmen.

Es sei $f(x)$ eine Hilfsfunktion, die folgende Eigenschaften besitzen mag:

1. $f(x)$ und ihre abgeleiteten Funktionen seien für alle reellen x kontinuierlich;

2. die Funktion $f(x)$ und sämtliche Ableitungen derselben verschwinden für $x = \pm \infty$.

Wenn nun $F(x)$ eine Funktion ist, welche für $x = \pm \infty$ gleich Null ist, so hat man die Reihe:

$$F(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \cdots \tag{1}$$

Es ist diese Reihenentwicklung, die hier näher untersucht werden soll.

Wird (1) der Reihe nach mit 1, x, x^2, x^3, ... multipliziert, erhält man infolge der Eigenschaften der generierenden Funktion $f(x)$, nach erfolgter Integration die Gleichungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xF(x)dx = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} xf'(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 F(x)dx = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx + A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f'(x)dx + A_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f''(x)dx;$$

. . . .

Jede Gleichung enthält eine endliche Zahl von Gliedern, und die Werte der Koeffizienten A_0, A_1, A_2, ... können nacheinander berechnet werden. Man sieht leicht, dass die Gleichung für den Koeffizienten A_r auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$A_r = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) F(x)dx, \tag{2}$$

wo $S_r(x)$ eine ganze rationale Funktion von x vom Grade r bezeichnet.

Die Funktion $S_r(x)$ lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Erstens bemerken wir, dass $S_r(x)$ völlig unabhängig von $F(x)$ ist. Zweitens ist ersichtlich, dass in der Entwickelung von $f^r(x)$, nach der Formel (1), alle Glieder mit Ausnahme von

$$A_r f^r(x)$$

verschwinden, und dass dann $A_r = 1$ ist. Wir erhalten folglich die Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) f(x)dx, \\ 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) f'(x)dx, \end{aligned} \right.$$

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) f''(x)\,dx\,, \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) f^r(x)\,dx\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese $r+1$ Gleichungen dienen zur vollständigen Bestimmung von $S_r(x)$. Wir bemerken zuerst, dass alle Integrale von der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f^n(x)\,dx$$

auf die Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)\,dx$$

reduziert werden können. Setzen wir nämlich

$$(4) \qquad \varkappa_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)\,dx\,,$$

so erhält man in der Tat, durch teilweise Integration,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f'(x)\,dx = -m\,\varkappa_{m-1}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f''(x)\,dx = (-1)^2 m(m-1)\,\varkappa_{m-2}\,,$$

und allgemein:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f^n(x)\,dx = (-1)^n m(m-1)\ldots(m-n+1)\,\varkappa_{m-n}$$

$$= (-1)^n \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-n}}\;\varkappa_{m-n}\,.$$

Für $m < n$ verschwindet die linke Seite.

Indem wir nun für $S_r(x)$ die Form

$$S_r(x) = \alpha_0^{(r)} x^r + \alpha_1^{(r)} x^{r-1} + \ldots + \alpha_r^{(r)} \tag{6}$$

ansetzen, erhalten wir also aus (3) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

$$0 = \alpha_0^{(r)} \varkappa_r + \alpha_1^{(r)} \varkappa_{r-1} + \alpha_2^{(r)} \varkappa_{r-2} + \cdots + \alpha_{r-2}^{(r)} \varkappa_2 + \alpha_{r-1}^{(r)} \varkappa_1 + \alpha_r^{(r)} \varkappa_0 \,,$$

$$0 = \alpha_0^{(r)} r \varkappa_{r-1} + \alpha_1^{(r)} (r-1) \varkappa_{r-2} + \alpha_2^{(r)} (r-2) \varkappa_{r-3} + \cdots + \alpha_{r-2}^{(r)} 2\varkappa_1 + \alpha_{r-1}^{(r)} \varkappa_0 \,,$$

$$0 = \alpha_0^{(r)} r(r-1) \varkappa_{r-2} + \alpha_1^{(r)} (r-1)(r-2) \varkappa_{r-3} + \alpha_2^{(r)} (r-2)(r-3) \varkappa_{r-4} + \cdots + \alpha_{r-2}^{(r)} 2\varkappa_0 \,,$$

. . . .

$$0 = \alpha_0^{(r)} \frac{\lfloor\underline{r}}{\lfloor\underline{2}} \varkappa_2 + \alpha_1^{(r)} \frac{\lfloor\underline{r-1}}{\lfloor\underline{1}} \varkappa_1 + \alpha_2^{(r)} \lfloor\underline{r-2}\, \varkappa_0 \,,$$

$$0 = \alpha_0^{(r)} \frac{\lfloor\underline{r}}{\lfloor\underline{1}} \varkappa_1 + \alpha_1^{(r)} \lfloor\underline{r-1}\, \varkappa_0 \,,$$

$$(-1)^r = \alpha_0^{(r)} \lfloor\underline{r}\, \varkappa_0 \,.$$

Die Ableitung dieser Formel wird erleichtert, wenn man für einen Augenblick die Bezeichnung

$$\varkappa_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f^n(x)\, dx$$

einführt. Man findet in der Tat

$$\varkappa_{m,n} = -m \varkappa_{m-1,\, n-1} = -\frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{m-1}} \varkappa_{m-1,\, n-1} \,,$$

$$= (-1)^2 m(m-1) \varkappa_{m-2,\, n-2} = (-1)^2 \frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{m-2}} \varkappa_{m-2,\, n-2} \,,$$

und allgemein

$$\varkappa_{m,n} = (-1)^s \frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{m-s}} \varkappa_{m-s,\, n-s} \,,$$

woraus für $s = n$ die Formel (5) hervorgeht.

Führt man die Bezeichnung

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_s^{(r)} &= \lfloor\underline{r-s}\, \alpha_s^{(r)} \,, \\ \lambda_s &= \frac{\varkappa_s}{\lfloor\underline{s}} \end{aligned} \right. \tag{7}$$

ein, so nehmen die Bedingungsgleichungen folgende Form an, wo wir der Kürze wegen den oberen Index (der überall gleich r ist) weggelassen haben, und ausserdem die Gleichungen in umgekehrter Ordnung aufschreiben.

$$(8)\quad \begin{cases} (-1)^r = \lambda_0\beta_0 , \\ \quad 0 = \lambda_1\beta_0 + \lambda_0\beta_1 , \\ \quad 0 = \lambda_2\beta_0 + \lambda_1\beta_1 + \lambda_0\beta_2 , \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad 0 = \lambda_{r-2}\beta_0 + \lambda_{r-3}\beta_1 + \lambda_{r-4}\beta_2 + \cdots + \lambda_0\beta_{r-2} ; \\ \quad 0 = \lambda_{r-1}\beta_0 + \lambda_{r-2}\lambda_1 + \lambda_{r-3}\beta_2 + \cdots + \lambda_1\beta_{r-2} + \lambda_0\beta_{r-1} , \\ \quad 0 = \lambda_r\ \ \beta_0 + \lambda_{r-1}\beta_1 + \lambda_{r-2}\beta_2 + \cdots + \lambda_2\beta_{r-2} + \lambda_1\lambda_{r-1} + \lambda_0\beta_r . \end{cases}$$

In den Koeffizienten β ausgedrückt, lautet nunmehr $S_r(x)$ folgendermassen:

$$(9)\qquad S_r(x) = \beta_0 \frac{x^r}{\underline{|r}} + \beta_1 \frac{x^{r-1}}{\underline{|r-1}} + \cdots + \beta_{r-1}x + \beta_r ,$$

wo man bei den β-Koeffizienten überall den Index r oben sich zu denken hat.

Die Lösung des Systemes (8) geschieht mit Hülfe der Determinante:

$$(10)\qquad \Delta_r = \begin{vmatrix} \lambda_0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda_1, & \lambda_0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{r-2}, & \lambda_{r-3}, & \lambda_{r-4}, & \cdots & \lambda_0, & 0, & 0 \\ \lambda_{r-1}, & \lambda_{r-2}, & \lambda_{r-3}, & \cdots & \lambda_1, & \lambda_0, & 0 \\ \lambda_r, & \lambda_{r-1}, & \lambda_{r-2}, & \cdots & \lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

deren Wert offenbar

$$(10^*)\qquad \Delta_r = \lambda_0^{r+1}$$

ist.

Schreiben wir

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{00}, & \cdots, & a_{0r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r0}, & \cdots, & a_{rr} \end{vmatrix},$$

so ist nunmehr nach bekannten Formeln

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta_r \beta_0^{(r)} = (-1)^r \dfrac{\delta \Delta_r}{\delta a_{00}}, \\ \Delta_r \beta_1^{(r)} = (-1)^r \dfrac{\delta \Delta_r}{\delta a_{01}}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Delta_r \beta_r^{(r)} = (-1)^r \dfrac{\delta \Delta_r}{\delta a_{0r}}. \end{cases}$$

Für $r = 0, 1, 2, \cdots$ erhalten wir hieraus folgende Werte für die β-Koeffizienten.

$r = 0.$

$$\Delta_0 = \lambda_0,$$
$$\lambda_0 \beta_0^{(0)} = 1.$$
$$\therefore \Delta_0 S_0(x) = 1;$$

$r = 1.$

$$\Delta_1 = \lambda_0^2,$$
$$\lambda_0^2 \beta_0^{(1)} = -\lambda_0,$$
$$\lambda_0^2 \beta_1^{(1)} = +\lambda_1$$
$$\therefore \lambda_0^2 S_1(x) = -\lambda_0 x + \lambda_1;$$

$r = 2.$

$$\Delta_2 = \lambda_0^3,$$
$$\lambda_0^3 \beta_0^{(2)} = \lambda_0^2,$$
$$\lambda_0^3 \beta_1^{(2)} = -\lambda_1 \lambda_0,$$
$$\lambda_0^3 \beta_2^{(2)} = \lambda_1^2 - \lambda_0 \lambda_2,$$
$$\therefore \lambda_0^3 S_2(x) = \lambda_0^2 \frac{x^2}{\underline{|2}} - \lambda_1 \lambda_0 x + \lambda_1^2 - \lambda_0 \lambda_2.$$

$r = 3.$

$$\Delta_3 = \lambda_0^4,$$
$$\lambda_0^4 \beta_0^{(3)} = -\lambda_0^3$$
$$\lambda_0^4 \beta_1^{(3)} = \lambda_1 \lambda_0^2$$
$$\lambda_0^4 \beta_2^{(3)} = -\lambda_0 \lambda_1^2 + \lambda_0^2 \lambda_2$$
$$\lambda_0^4 \beta_3^{(3)} = \lambda_1^3 - 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^2 \lambda_3$$
$$\therefore \lambda_0^4 S_3(x) = -\lambda_0^3 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \lambda_1 \lambda_0^2 \frac{x^2}{\underline{|2}} - (\lambda_0 \lambda_1^2 - \lambda_0^2 \lambda_2) \frac{x}{\underline{|1}} + $$
$$+ \lambda_1^3 - 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^2 \lambda_3.$$

$$r = 4.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= \lambda_0^5,\\
\lambda_0^5 \beta_0^{(4)} &= \lambda_0^4,\\
\lambda_0^5 \beta_1^{(4)} &= \lambda_1 \lambda_0^3,\\
\lambda_0^5 \beta_2^{(4)} &= \lambda_0^2 \lambda_1^2 - \lambda_0^3 \lambda_2,\\
\lambda_0^5 \beta_3^{(4)} &= -\lambda_0 \lambda_1^3 + 2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0^3 \lambda_3,\\
\lambda_0^5 \beta_4^{(4)} &= \lambda_1^4 - 3\lambda_0 \lambda_1^2 \lambda_2 + 2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0^2 \lambda_2^2 - \lambda_0^3 \lambda_4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lambda_0^5 S_4(x) = \lambda_0^4 \frac{x^4}{\lfloor 4} - \lambda_1 \lambda_0^3 \frac{x^3}{\lfloor 3} + (\lambda_0^2 \lambda_1^2 - \lambda_0^3 \lambda_2) \frac{x^2}{\lfloor 2}\\
- (\lambda_0 \lambda_1^3 - 2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^3 \lambda_3) \frac{x}{\lfloor 1}\\
+ \lambda_1^4 - 3\lambda_0 \lambda_1^2 \lambda_2 + 2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0^2 \lambda_2^2 - \lambda_0^3 \lambda_4.
\end{aligned}$$

Die Berechnung der Koeffizienten wird erleichtert, wenn man bemerkt, dass die folgende Relation allgemein stattfindet:

(12) $$\beta_i^{(r)} = -\beta_i^{(r-1)} \quad (i < r),$$

welche Formel ohne Schwierigkeit aus (11) abgeleitet werden kann.

Die einzigen Koeffizienten, die direkt berechnet werden müssen, sind also die Koeffizienten $\beta_r^{(r)}$, welche vom Faktor λ_0^{r+1} abgesehen — durch die Determinante

$$D_r = \begin{vmatrix}
\lambda_1, & \lambda_0, & 0, & \cdots, & 0, & 0\\
\lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_0, & \cdots, & 0, & 0\\
. & . & . & . & . & .\\
\lambda_{r-2}, & \lambda_{r-3}, & \lambda_{r-4}, & \cdots, & \lambda_0, & 0\\
\lambda_{r-1}, & \lambda_{r-2}, & \lambda_{r-3}, & \cdots, & \lambda_1, & \lambda_0\\
\lambda_r, & \lambda_{r-1}, & \lambda_{r-2}, & \cdots, & \lambda_2, & \lambda_1
\end{vmatrix}$$

gegeben sind.

Man erhält aber leicht die folgende Rekursionsformel für D_r.

(13) $$D_r = \lambda_1 D_{r-1} - \lambda_0 \lambda_2 D_{r-2} + \lambda_0^2 \lambda_3 D_{r-3} - \cdots$$
$$+ (-1)^{r-1} \lambda_0^{r-3} \lambda_{r-2} D_2 - (-1)^{r-1} \lambda_0^{r-2} \lambda_{r-1} D_1 + (-1)^{r-1} \lambda_0^{r-1} \lambda_r D_0,$$

wo man

$$D_1 = \lambda_1,$$
$$D_0 = 1$$

zu setzen hat.

Endlich hat man

(14) $$\lambda_0^{r+1}\beta_r^{(r)} = D_r .$$

Mittelst der Gleichungen (12), (13) und (14) können die Koeffizienten $\beta_i^{(r)}$, und somit auch die Funktion $S_r(x)$, für alle Werte der Indices berechnet werden.

Die Gleichungen (9) und (11) erlauben die Funktionen $S_r(x)$ durch eine Determinante darzustellen. Wir haben in der Tat

(15) $$S_r(x) = (-1)^r \begin{vmatrix} \frac{x^r}{\lfloor r}, & \frac{x^{r-1}}{\lfloor r-1}, & \frac{x^{r-2}}{\lfloor r-2}, & \dots, & \frac{x}{\lfloor 1}, & 1 \\ \lambda_1, & \lambda_0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_r, & \lambda_{r-1}, & \lambda_{r-2}, & \dots, & \lambda_1, & \lambda_0 \end{vmatrix},$$

welche Formel unter Umständen bei der Diskussion der Eigenschaften der Funktion $S_r(x)$ von Nutzen sein kann.

Nachdem die Funktionen $S_r(x)$ somit bestimmt sind, erhält man die Koeffizienten A_r mittelst (2), und damit ist die Entwickelung

(16) $$F(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \cdots$$

gegeben.

Die Frage, die in Bezug auf diese Reihe zunächst untersucht werden muss, bezieht sich auf die Konvergenzverhältnisse, die hier vorkommen können. Da die Koeffizienten A_i sowohl von der Funktion $F(x)$ wie von der generierenden Funktion $f(x)$ (vermittelst der Koeffizienten λ_s) abhängig sind, so ist zu erwarten, dass die Bedingungen für die Konvergenz bei verschiedener Wahl der generierenden Funktion $f(x)$ und der zu entwickelnden Funktion sich verschieden gestalten werden. Es lässt sich auch *a priori* vermuten, dass die allgemeinen Konvergenzkriterien von ziemlich verwickelter Natur sein müssen. Man kann unter Umständen eine solche Wahl der generierenden Funktion $f(x)$ treffen, dass wenigstens für gewisse $F(x)$ die Entwickelung (16) für alle reellen x unbedingt konvergiert. Dies ist z. B. der Fall, wenn diese Reihe nur eine endliche Zahl von Gliedern enthält. Für andere Formen der generierenden Funktion gehören vielleicht die Reihen (16) zu jener interessanten Kategorie von Reihen,

die man gewöhnlich als *halb-konvergent* bezeichnet, welche Reihen zwar im gewöhnlichen Sinne divergent sind, jedoch zur numerischen Berechnung von Funktionen benutzt werden können. Endlich hat es keine Schwierigkeit, solche Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ aufzustellen, dass die Reihe (16) *divergent* ist.

Die Bedingungen, welchen die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ unterliegen müssen, damit (16) eine konvergente, halb-konvergente oder divergente Reihe darstellt, aufzustellen, ist also eine sehr umfassende, und wahrscheinlich auch eine schwierige Aufgabe, die ich nicht gelöst habe. Ich will indessen einige allgemeine Gesichtspunkte hervorheben, die bei der Untersuchung dieser Fragen mir wichtig erscheinen.

Die Analogie der Reihen (16) mit den FOURIER'schen Reihen liegt auf der Hand, wenn man die Form (2) der Koeffizienten mit der bekannten Integralform der Koeffizienten in den FOURIER'schen Reihen vergleicht. Es sei $F(x)$ eine Funktion, die wir der Einfachheit wegen als gerade und positiv zwischen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ annehmen wollen, dann hat man nach der Darstellungsweise von FOURIER:

$$F(x) = C_0 + 2C_1 \cos x + 2C_2 \cos 2x + \cdots, \tag{17}$$

wo

$$C_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos rx \; F(x)\,dx. \tag{17*}$$

Nach (16) hat man dagegen

$$F(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \cdots, \tag{18}$$

wo

$$A_r = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(x) F(x)\,dx. \tag{18*}$$

Die Reihe (17) stellt die Funktion $F(x)$ dar für alle reellen x zwischen $-\pi$ und $+\pi$, die Reihe (18) repräsentiert, vorausgesetzt, dass sie überhaupt konvergent ist, die Funktion $F(x)$ für alle reellen x-Werte.

Worin liegt der Grund der Konvergenz der Reihe (17)?

Man kann die Frage am einfachsten beantworten, indem man bemerkt, *dass der Faktor*

$$\cos r x ,$$

der im Ausdrucke der Koeffizienten unter dem Integralzeichen vorkommt, zwischen $x = -\pi$ *und* $x = +\pi$, $2r$ *reelle Wurzeln hat.* Man versteht hieraus leicht, wie mit wachsendem r die Elementarteile des Integrales (17*) wechselweise aus positiven und negativen, *näherungsweise gleich grossen* Summanden bestehen, die sich gegenseitig nahe vernichten. Die Konvergenz der Reihe hört offenbar erst auf, wenn die Funktion $F(x)$ besonders eigentümliche Kontinuitätseigenschaften besitzen sollte.

Bei der Reihe (18) *kann* die Sache ähnlich liegen. Die Funktion $S_r(x)$, die hier unter dem Integralzeichen als Faktor auftritt, ist vom Grade r und hat also r Wurzeln. In gewissen Fällen, die übrigens von sehr allgemeiner Natur zu sein scheinen, können diese Wurzeln *sämtlich reell sein*. Es treten dann analoge Verhältnisse wie bei den FOURIER'schen Reihen ein. Die Analogie ist insofern unvollständig, als hier die Grenzen $\pm\infty$ sind (statt $\pm\pi$ bei den FOURIER'schen Reihen), und es würde deswegen beim ersten Anblick fraglich erscheinen, ob die Realität der Wurzeln grosse Bedeutung für die Konvergenz der Reihe hat. Eine nähere Überlegung zeigt indessen, dass dies der Fall ist, obgleich die Konvergenz sich mehr den bei den *halb-konvergenten* Reihen herrschenden Verhältnissen zu nähern scheint.

Ich habe die obigen Auseinandersetzungen, obgleich sie zum Teil nur Mutmassungen sind, hier nicht ausgeschlossen, weil ich in der nächsten Zeit wahrscheinlich nicht Gelegenheit haben werde, mich mit diesem Probleme zu beschäftigen, und die Wichtigkeit der Aufgabe hoffentlich einen Mathematiker veranlassen wird, sich mit der Sache zu beschäftigen. Es schien mir dann nicht aus dem Wege, die obigen Erwägungen mitzuteilen in der Hoffnung, dadurch etwas zur Lösung der Konvergenzfrage beizutragen.

Ist die generierende Funktion $f(x)$ eine *gerade* Funktion von x, werden die Ausdrücke für $S_r(x)$ etwas einfacher, und stelle ich hier die Formeln für diesen Fall zusammen. In Bezug auf die Grössen λ_s, welche durch die Gleichung

(19) $$\lambda_s = \frac{1}{\underline{\vert s}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx$$

definiert sind, findet man dann, dass alle λ_s mit ungeradem Index (s) verschwinden, so dass

$$0 = \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \cdots$$

Die Funktionen $S_r(x)$ erhalten dann die Form

$$\begin{aligned}
\lambda_0 S_0(x) &= 1\,,\\
\lambda_0 S_1(x) &= -x\,,\\
\lambda_0^2 S_2(x) &= \lambda_0 \frac{x^2}{\underline{\vert 2}} - \lambda_2\,,\\
\lambda_0^3 S_3(x) &= -\lambda_0^2 \frac{x^3}{\underline{\vert 3}} + \lambda_0\lambda_2 \frac{x}{\underline{\vert 1}}\,,\\
\lambda_0^4 S_4(x) &= \lambda_0^3 \frac{x^4}{\underline{\vert 4}} - \lambda_0^2\lambda_2 \frac{x^2}{\underline{\vert 2}} + \lambda_0\lambda_2^2 - \lambda_0^2\lambda_4\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und schreibt man im allgemeinen

(20) $$\begin{cases} S_{2r}(x) = \beta_0^{(2r)} \dfrac{x^{2r}}{\underline{\vert 2r}} + \beta_2^{(2r)} \dfrac{x^{2r-2}}{\underline{\vert 2r-2}} + \cdots + \beta_{2r-2}^{(2r)} \dfrac{x^2}{\underline{\vert 2}} + \beta_{2r}^{(2r)}\,,\\ S_{2r+1}(x) = \beta_0^{(2r+1)} \dfrac{x^{2r+1}}{\underline{\vert 2r+1}} + \beta_2^{(2r+1)} \dfrac{x^{2r-1}}{\underline{\vert 2r-1}} + \cdots + \beta_{2r}^{(2r+1)} x\,, \end{cases}$$

so ist

(20*) $$\begin{cases} \beta_i^{(2r+1)} = -\beta_i^{(2r)}\,, & (i \leq 2r)\,,\\ \beta_i^{(2r)} = -\beta_i^{(2r-1)}\,, & (i < 2r)\,. \end{cases}$$

Da alle $\beta_i^{(r)}$ mit ungeradem Index i verschwinden, so ist $\beta_{(2r+1)}^{(2r+1)} = 0$, und die Formeln (20*) erlauben alle Koeffizienten zu berechnen, wenn nur $\beta_{2r}^{(2r)}$ ($r = 0, 1, 2, \cdots$) bekannt sind. Zur Berechnung dieser Grössen hat man nach (14)

$$\lambda_0^{2r+1}\beta_{2r}^{(2r)} = D_{2r}$$

und nach (13)

$$D_{2r} = -\lambda_0\lambda_2 D_{2r-2} - \lambda_0^3\lambda_4 D_{2r-4} - \cdots - \lambda_0^{2r-3}\lambda_{2r-2} D_2 - \lambda_0^{2r-1}\lambda_{2r} D_0\,.$$

Wird in diese Formel β_{2r} statt D_{2r} eingeführt, bekommt man also die Rekursionsformel:

$$(21) \quad 0 = \lambda_0 \beta_{2r}^{(2r)} + \lambda_2 \beta_{2r-2}^{(2r-2)} + \lambda_4 \beta_{2r-4}^{(2r-4)} + \cdots + \lambda_{2r-2} \beta_2^{(2)} + \lambda_{2r} \beta_0^{(0)} .$$

Aus (20*) und (21) lassen sich sämtliche $S_r(x)$ leicht berechnen.

Ein spezieller Fall der hier behandelten Reihenentwickelungen kommt in der Litteratur der letzten Jahrzehnte öfters vor, der Fall nämlich, wo

$$f(x) = e^{-x^2}$$

ist. Die entsprechenden Reihenentwickelungen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Man trifft diese Reihe, so viel ich weiss, zuerst bei J. P. GRAM in seiner Abhandlung: »Om Rækkeudviklinger, bestemte ved hjælp af de minste Kvadraters Methode» vom Jahre 1879. Nach der Angabe von GRAM (S. 94) scheint OPPERMANN sich schon früher (»for længere Tid siden») mit ähnlichen Entwickelungen beschäftigt zu haben; es ist mir aber nicht bekannt, wo seine Untersuchungen veröffentlicht worden sind. Die Bedeutung dieser Reihe für die Fehlertheorie ist von THIELE in seiner interessanten »Theory of Observations» auseinandergesetzt worden. Die Untersuchungen THIELES findet man auch in seinen dänisch geschriebenen Abhandlungen: Forelæsninger over Almindelig Iagttagelseslære (1889), Elementær Iagttagelseslære (1897).

Von einem anderen mathematischen Gesichtspunkte ist dieselbe Reihe von BRUNS in zwei wichtigen Abhandlungen behandelt worden: »Über die Darstellung von Fehlergesetzen» Astron. Nachrichten Bd. 143 (1897) und »Zur Collectiv-Maasslehre» in Wundt, Philosophische Studien, Bd. XIV. Bei einem Besuche in Leipzig im November vorigen Jahres bin ich durch BRUNS auf diese Untersuchungen aufmerksam gemacht worden und ich habe dabei die obige Verallgemeinerung dieser Reihe gefunden. Bei derselben Gelegenheit teilte mir BRUNS mit, dass er im Besitze eines Konvergenzkriteriums war, wodurch wenigstens die *praktischen* Anwendungen der Reihe gesichert waren. In den »Meddelanden från Lunds Observatorium» Nr. 25 habe ich bewiesen, dass die Fehlertheorie von LAPLACE — die allgemeinste Fehlertheorie, die man besitzt — folge-

richtig ausgeführt, für das Fehlergesetz in seiner allgemeinsten Fassung zwei verschiedene Formen gibt, von denen die eine durch eine Reihe von der Form (18) dargestellt wird, wo $f(x) = e^{-x^2}$ zu setzen ist.

Wir setzen

(22) $$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}},$$

wo b und σ zwei noch unbestimmte Parameter bezeichnen und wollen die besondere Form der Reihe (18) untersuchen, wenn man daselbst

$$f(x) = \varphi(x)$$

setzt.

Wir hätten zu dem Zwecke zuerst die Grössen

$$\lambda_s = \frac{1}{\underline{|s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \varphi(x)\, dx$$

zu berechnen. Die Werte dieser Integrale, wo $\varphi(x)$ durch (22) gegeben ist, sind aus der Theorie der Wahrscheinlichkeiten bekannt. Wir können indessen in diesem Fall das Ziel einfacher erhalten, ohne den Wert der Grösse λ_s zu berechnen.

Die Ableitung der $r$ten Ordnung der Funktion $\varphi(x)$ kann offenbar in der Form

$$\frac{d^r \varphi(x)}{dx^r} = R_r(x)\varphi(x),$$

geschrieben werden, wo $R_r(x)$ ein Polynom vom Grade r ist. Wir können beweisen, dass die Funktion $S_r(x)$, die wir aufzusuchen haben um die Koeffizienten in der Reihe

(23) $$F(x) = A_0\varphi(x) + A_1\varphi'(x) + A_2\varphi''(x) + \cdots$$

zu bilden, durch $R_r(x)$ ausgedrückt werden kann.

Setzt man nämlich

$$\mathrm{I}_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^m(x)\, R_n(x)\, dx\,,$$

so findet man durch teilweise Integration, in Betracht der Eigenschaft

$$\varphi^r(\pm\infty) = 0,$$

dass

(24) $$I_{m,n} = 0 \text{ für } m \gtrless n.$$

Ist $m > n$ erhält man diese Relation unmittelbar durch direkte Anwendung der Methode der teilweisen Integration. Ist dagegen $m < n$, so erhält man denselben Schluss, indem man bemerkt, dass

$$\varphi^m(x) R_n(x) = \varphi(x) R_m(x) R_n(x)$$
$$= \varphi^n(x) R_m(x),$$

und also

$$I_{m,n} = I_{n,m}$$

ist.

Um die Werte der Integrale $I_{m,n}$ für $m = n$ zu erhalten, setzen wir

$$\varphi^r(x) = a_0^{(r)} x^r + a_1^{(r)} x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}^{(r)} x + a_r^{(r)},$$

und erhalten dann

$$I_{m,m} = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{d^m R_m}{dx^m} dx$$

oder

(25) $$I_{m,m} = (-1)^m a_0^{(m)} \lfloor m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Ziehen wir nun in Betracht, dass

$$a_0^{(m)} = (-1)^m \sigma^{-2m}$$

ist, und dass weiter, nach der bekannten Formel von LAPLACE,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ist, so hat man also

(25*) $$I_{m,m} = \frac{\lfloor m}{\sigma^{2m}}.$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (23) mit $R_r(x)$ und integrieren, erhalten wir also folgenden Wert für die Koeffizienten A_r:

$$A_r = \frac{\sigma^{2r}}{\lfloor r} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) R_r(x) dx \,, \tag{26}$$

so dass, indem wir diese Formel mit der allgemeinen Formel (2) für die Koeffizienten in solchen Reihen vergleichen,

$$S_r(x) = \frac{\sigma^{2r}}{\lfloor r} R_r(x) \tag{27}$$

ist.

Der Ausdruck für die Grössen $R_r(x)$ ist aber leicht zu erhalten. Man hat nämlich für die Ableitungen der Funktion $\varphi(x)$ die Rekursionsformel:

$$\sigma^2 \varphi^{(r+2)}(x) + (x-b)\varphi^{(r+1)}(x) + (r+1)\varphi^{(r)}(x) = 0$$

und also, wenn man die R_r-Funktionen einführt:

$$\sigma^2 R_{r+2} + (x-b) R_{r+1} + (r+1) R_r = 0 \,. \tag{28}$$

Hieraus berechnet man successive

$$\left\{\begin{aligned} R_0 &= 1 \,, \\ \sigma^2 R_1 &= -(x-b) \,, \\ \sigma^4 R_2 &= +(x-b)^2 - \sigma^2 \,, \\ \sigma^6 R_3 &= -(x-b)^3 + 3\sigma^2(x-b) \,, \\ \sigma^8 R_4 &= +(x-b)^4 - 6\sigma^2(x-b)^2 + 3\sigma^4 \,, \\ \sigma^{10} R_5 &= -(x-b)^5 + 10\sigma^2(x-b)^3 - 15\sigma^4(x-b) \,, \\ \sigma^{12} R_6 &= +(x-b)^6 - 15\sigma^2(x-b)^4 + 30\sigma^4(x-b)^2 - 15\sigma^6 \,. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{28*}$$

Indem immer noch unter b eine beliebige Grösse verstanden wird, führen wir die Bezeichnung

$$\mu'_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^s F(x) dx \tag{29}$$

ein und erhalten dann, unter Berücksichtigung der Formeln (28*) und (26),

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \mu'_0\,, \\
A_1 &= -\mu'_1\,, \\
\lfloor 2\, A_2 &= \mu'_2 - \sigma^2 \mu'_0\,, \\
\lfloor 3\, A_3 &= -\mu'_3 + 3\sigma^2 \mu'_1 \\
\lfloor 4\, A_4 &= \mu'_4 - 6\sigma^2 \mu'_2 + 3\sigma^4 \mu'_0\,. \\
\lfloor 5\, A_5 &= -\mu'_5 + 10\sigma^2 \mu'_3 - 15\sigma^4 \mu'_1\,, \\
\lfloor 6\, A_6 &= \mu'_6 - 15\sigma^2 \mu'_4 + 30\sigma^4 \mu'_2 - 15\sigma^6 \mu'_0\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{30}
$$

Die Grösse b kann man etwa in einer der folgenden Arten wählen:

1. b wird so bestimmt, dass

$$\int_{-\infty}^{b} F(x)\,dx = \int_{b}^{+\infty} F(x)\,dx$$

ist;

2. b wird so bestimmt, dass $F(b)$ ein Maximum von $F(x)$ ist;

3. b wird so bestimmt, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x F(x)\,dx = b \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx \tag{31}$$

ist.

Die im allgemeinen verschiedenen Werte von b, die diesen Bedingungen entsprechen, wollen wir mit b_1, b_2 und b_3 bezeichnen. Nach einer von FECHNER in seiner »Kollektiv-Maasslehre» benutzten Terminologie können wir b_1 als den *Zentralwert* von x, b_2 als den *dichtesten Wert* und b_3 als den *Mittelwert* von x bezeichnen.

Für die Konvergenz der Reihe (23) ist es ziemlich gleichgültig, ob man von dem einen oder dem anderen dieser Werte von b (oder auch von einem benachbarten) ausgeht. Die algebraische — und numerische — Behandlung des Problems gestaltet sich indessen am einfachsten, wenn man b mit dem Mittelwert von x identifiziert.

Es verschwindet nämlich dann nach (30) der Koeffizient A_1. Wird ausserdem die Grösse σ, die noch unbestimmt ist, so gewählt, dass der Koeffizient A_2 ver-

schwindet, was immer erreicht werden kann, wenn $\mu'_0 \neq 0$ ist, so nimmt die Reihe für $F(x)$ die Form

(32) $$F(x) = A_0 \varphi(x) + A_3 \varphi^{III}(x) + A_4 \varphi^{IV}(x) + \cdots$$

an. Die Grössen σ und b_3 sind durch die Gleichungen

(33) $$\begin{cases} 0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - b_3) F(x) dx , \\ 0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - b_3) F(x) dx - \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx , \end{cases}$$

bestimmt, und führen wir die Bezeichnung

(33*) $$\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - b_3)^s F(x) dx$$

ein, so erhält man für die Koeffizienten A_r in (32) die Werte

$$\begin{aligned} A_0 &= \mu_0 , \\ \lfloor 3 \, A_3 &= -\mu_3 , \\ \lfloor 4 \, A_4 &= \mu_4 - 3\sigma^4 \mu_0 , \\ \lfloor 5 \, A_5 &= -\mu_5 + 10\sigma^2 \mu_3 , \\ \lfloor 6 \, A_6 &= \mu_6 - 15\sigma^2 \mu_4 + 15\sigma^6 \mu_0 , \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Grösse μ_s wird das *Moment* der $s$ten Ordnung der Funktion $F(x)$ genannt. Die Koeffizienten A_r sind lineare Funktionen dieser Momente.

Man vergleiche in Bezug auf die Entwickelung von Funktionen nach den Ableitungen der Funktion $\varphi(x)$ die Auseinandersetzungen von THIELE und BRUNS in den zitierten Abhandlungen. THIELE gibt in seinem Werke »Forelæsninger over Almind. Iagttagelseslære» die Werte der Funktionen $R_r(x)$ für $r = 1, 2, \cdots$ bis $r = 14$ an, aus welchen Ausdrücken unmittelbar zu entnehmen ist, dass die Wurzeln dieser Funktionen — wenigstens bis $r = 14$ — sämtlich reell sind. Man vergleiche hiermit die oben gemachten Bemerkungen über die Konvergenzfrage.

Die Funktion $\varphi(x)$ hat eine weitgehende und fundamentale Bedeutung in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Wie

ich in meinem Aufsatz »Über die zweite Form des Fehlergesetzes» (Meddelanden från Lunds Obs. N:o 26) bewiesen habe, kann das allgemeine Fehlergesetz in zwei verschiedenen Formen auftreten, die ich Typus A und Typus B genannt habe. So oft das Fehlergesetz von Typus A — dem gewöhnlichen Typus — ist, kann die entsprechende Frequenzkurve mit Hülfe der Funktion $\varphi(x)$ durch die Reihe (32) dargestellt werden. Es können aber statt $\varphi(x)$ verschiedene andere Funktionen bei der Lösung dieser Aufgabe in Betracht kommen. Unter diesen Funktionen will ich mich besonders bei einer aufhalten.

Ich setze

$$\chi(x) = \frac{1}{\pi\sigma_1} \frac{2}{e^{\frac{x}{\sigma_1}} + e^{-\frac{x}{\sigma_1}}} = \frac{1}{\pi\sigma_1} \operatorname{sec hp} \frac{x}{\sigma_1} \tag{34}$$

Diese Funktion besitzt die Eigenschaft für $x = \pm\infty$, nebst allen ihren Ableitungen, zu verschwinden. Man kann sie also nach der Formel (18) als Erzeugende bei der Darstellung von reellen Funktionen benutzen. Die Koeffizienten in der Reihe

$$F(x) = A_0\chi(x) + A_1\chi'(x) + A_2\chi''(x) + \cdots \tag{35}$$

lassen sich mittelst der Formeln (18), (20*) und (21) berechnen.

Zuerst handelt es sich um die Berechnung der Grössen λ_s. Nach (19) hat man

$$\lambda_s = \frac{1}{\underline{|s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \chi(x) dx . \tag{36}$$

Die λ_s mit ungeradem Index s verschwinden, so dass die $S_r(x)$ nach (20) berechnet werden können.

Eine bekannte Formel aus der Integralrechnung gibt uns

$$\frac{2}{\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x} + e^{-\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x}}{e^{\frac{x}{\sigma_1}} + e^{-\frac{x}{\sigma_1}}} dx = \sec\gamma$$

oder

(37) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x)\frac{e^{\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x}+e^{-\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x}}{2}dx=\sec\gamma .$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung können für hinreichend kleine γ in konvergente Reihen nach Potenzen von γ entwickelt werden. Man hat

$$\frac{e^{\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x}+e^{-\frac{2\gamma}{\pi\sigma_1}x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}x^{2n}}{\pi^{2n}\sigma_1{}^{2n}}\frac{\gamma^{2n}}{\underline{|2n}},$$

$$\sec\gamma=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\frac{\gamma^{2n}}{\underline{|2n}},$$

wo B_{2n} die s. g. Secans-Koeffizienten sind.

Man hat

$$B_0=1,$$
$$B_2=1,$$
$$B_4=5,$$
$$B_6=6.$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

und allgemein

$$\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}}\frac{B_{2n}}{\underline{|2n}}=\frac{1}{1^{2n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\cdots,$$

also für hinreichend grosse n genähert

$$B_{2n}=\underline{|2n}\,\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2},$$

Indem wir die Koeffizienten gleicher Potenzen von γ in der Entwickelung der beiden Seiten der Gleichung (37) identifizieren, bekommen wir also die Relationen

$$\frac{2^{2n}}{\pi^{2n}\sigma_1^{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}\chi(x)dx=B_{2n},$$

oder wenn wir die genäherten Werte von B_{2n} einführen,

(38) $$\lambda_{2n}=\frac{4}{\pi}\sigma_1^{2n},$$

welche Formel für nicht allzu kleine n Gültigkeit hat. Schon für $n = 3$ ist diese Formel genügend. Der genaue Wert ist

(38*) $$\lambda_{2n} = \frac{B^{2n}}{\underline{|2n}} \frac{\pi^{2n} \sigma_1^{2n}}{2^{2n}}.$$

Also hat man

$$\lambda_0 = 1,$$
$$\lambda_2 = \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2,$$
$$\lambda_4 = \frac{5\pi^4}{384} \sigma_1^4.$$

u. s. w.

Man hat somit

$$S_0(x) = 1,$$
$$S_1(x) = -x,$$
$$S_2(x) = \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2,$$
$$S_3(x) = -\frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2 x,$$
$$S_4(x) = \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2 \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^4 \sigma_1^4}{384},$$

. . . .

Die folgenden $S_{2r}(x)$ werden nach (20), (20*) und (21) berechnet.

Über die Grösse σ_1 können wir willkürlich verfügen. Um noch einen Parameter zur Verfügung zu haben, setzen wir

$$x = y - b$$
$$F(x) = F(y-b) = G(y)$$

und haben dann die Formel

(39) $$G(y) = A_0 \chi(y-b) + A_1 \chi'(y-b) + A_2 \chi''(y-b) + \cdots,$$

wo nunmehr

(39*) $$A_r = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) S_r(y-b) dy$$

ist.

Führen wir die Bezeichnungen

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-b)^s G(y) dy \tag{40}$$

ein, so erhalten wir also die folgenden Werte der Koeffizienten A_r.

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mu_0 , \\
A_1 &= -\mu_1 , \\
A_2 &= \frac{\mu_2}{\underline{\lfloor 2}} - \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2 \mu_0 , \\
A_3 &= -\frac{\mu_3}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{\pi^2 \sigma_1^2}{8} \mu_1 , \\
A_4 &= \frac{\mu_4}{\underline{\lfloor 4}} - \frac{\pi^2 \sigma_1^2}{8} \frac{\mu_2}{\underline{\lfloor 2}} - \frac{\mu^4 \sigma_1^4}{384} \mu_0 , \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Wir verfügen nun über die Grössen b und σ_1 in solcher Weise, dass $A_1 = A_2 = 0$, so dass

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_0 \frac{\pi^2}{8} \sigma_1^2 = \frac{\mu_2}{\underline{\lfloor 2}} ,$$

und erhalten also folgende Werte für die Koeffizienten A_r:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mu_0 , \\
\underline{\lfloor 3}\, A_3 &= -\mu_3 \\
\underline{\lfloor 4}\, A_4 &= \mu_4 - 7 \frac{\mu_2^2}{\mu_0} . \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{41}$$

Für b bekommen wir hier denselben Wert wie beim Falle $f(x) = \varphi(x)$, dagegen ist nicht $\sigma_1 = \sigma$. Der Koeffizient A_3 fällt in beiden Fällen ähnlich aus, dagegen wird der Wert von A_4 verschieden. Man kann diesen Unterschied der beiden Darstellungsmethoden verstehen, wenn man den Verlauf der beiden generierenden Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ mit einander vergleicht.

Für die Ableitungen der Funktion $\chi(x)$ bekommt man die Werte

$$\sigma\,\chi'(x) = -\operatorname{tghp}\frac{x}{\sigma}\,\chi(x)\,,$$

$$\sigma^2\chi''(x) = \left(2\operatorname{tghp}^2\frac{x}{\sigma} - 1\right)\chi(x)\,,$$

$$\sigma^3\chi'''(x) = -\left(6\operatorname{tghp}^3\frac{x}{\sigma} - 5\operatorname{tghp}\frac{x}{\sigma}\right)\chi(x)\,,$$

$$\sigma^4\chi^{IV}(x) = \left(24\operatorname{tghp}^4\frac{x}{\sigma} - 28\operatorname{tghp}^2\frac{x}{\sigma} + 5\right)\chi(x)\,,$$

. . . .

und allgemein:

$$\sigma^r\chi^{(r)}(x) = R^r(x)\chi(x)\,,$$

wo $R_r(x)$ eine ganze rationale Funktion von $\operatorname{tghp}\frac{x}{\sigma}$ vom Grade r bezeichnet.

Es scheint, dass man

$$R_r(\pm\infty) = 1$$

hat und dass sämtliche Wurzeln der Gleichung $R_r(x) = 0$ *reell* sind. Wenn dies der Fall wäre, würde sich die Diskussion der Konvergenz der Reihe (35) einfacher gestalten als die entsprechende Untersuchung der Reihe (23).

Ausser den beiden hier behandelten Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ können natürlich eine Menge andere Funktionen als Erzeugende benutzt werden, um reelle Funktionen nach der Reihe (18) darzustellen. So lange aber die Konvergenzfrage in der Luft schwebt, dürfte das Obige genügen, um den Mechanismus bei der Aufsuchung solcher Reihen klarzulegen. Ich füge hinzu, dass ich mich durch numerische Anwendungen überzeugt habe, dass solche Reihen — von der theoretischen Konvergenzfrage abgesehen — für praktische Zwecke Anwendbarkeit haben. Man vergleiche übrigens in Bezug hierauf die auf Veranlassung von BRUNS publizierte Untersuchung von WERNER: »Beiträge zur Collectivmasslehre» in Wundt, Philosophische Studien, Bd. XV, 1900.

II.

Es gibt eine andere Art reelle Funktionen darzustellen, die mit der im vorigen Abschnitt behandelten Methode verwandt ist, und die in einigen Fällen vor der früheren Methode vorzuziehen ist. In den meisten Fällen kann man nach Belieben die eine oder die andere Methode mit gleichem Erfolg benutzen.

Es sei $g(x)$ eine Funktion von x, die für $x = \pm \infty$ gleich Null ist. Es bedeute weiter $\Delta g(x)$, $\Delta^2 g(x)$ u. s. w. die *Differenzen* von $g(x)$ der ersten, der zweiten Ordnung u. s. w., so dass

$$\begin{aligned}\Delta\, g(x) &= g(x) - g(x-\omega)\,,\\ \Delta^2 g(x) &= \Delta g(x) - \Delta g(x-\omega)\\ &= g(x) - 2g(x-\omega) + g(x-2\omega)\,,\\ \Delta^3 g(x) &= \Delta^2 g(x) - \Delta^2 g(x-\omega)\,,\\ &= g(x) - 3g(x-\omega) + 3g(x-2\omega) - g(x-3\omega)\\ &\qquad \text{u. s. w.,}\end{aligned}$$

wo ω ein konstantes Intervall bezeichnet.

Der Voraussetzung über $g(x)$ gemäss verschwinden alle Differenzen von $g(x)$ für $x = \pm \infty$.

Es sei nun $F(x)$ eine Funktion, die für reelle Werte von x definiert ist, und die für $x = \pm \infty$ verschwindet. Ich behaupte, dass man vom formalen Gesichtspunkte die Reihe

$$F(x) = B_0 g(x) + B_1 \Delta g(x) + B_2 \Delta^2 g(x) + \cdots \tag{42}$$

aufstellen kann, wo die Koeffizienten B_r von x unabhängig sind. Die Koeffizienten B_r lassen sich in folgender Weise berechnen.

Wir setzen in (42) für x den Wert $x + s\omega$ und lassen s alle ganzen Zahlenwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Nach der über die Funktion $g(x)$ gemachten Annahme haben wir dann, indem wir alle so erhaltenen Gleichungen summieren

$$\Sigma F(x) = B_0 \Sigma g(x)\,,$$

wo wir der Kürze wegen unter $\Sigma F(x)$ die Summe

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} F(x+s\omega)$$

verstehen und ähnlich für $\Sigma g(x)$. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}\Sigma \Delta^r g(x) &= \Sigma \Delta^{r-1} g(x) - \Sigma \Delta^{r-1} g(x-\omega)\\ &= 0 \qquad (\text{für } r \geqq 1).\end{aligned}$$

Um die übrigen Koeffizienten zu bestimmen, bedienen wir uns des folgenden Theorems

Es seien u_x und v_x zwei reellen Funktionen von x, dann hat man

$$\begin{aligned}\Delta(u_x v_x) &= u_{x-\omega}\Delta v_x + v_{x-\omega}\Delta u_x + \Delta u_x \Delta v_x\\ &= v_x \Delta u_x + u_{x-\omega}\Delta v_x\\ &= u_x \Delta v_x + v_{x-\omega}\Delta u_x .\end{aligned}$$

Setzt man $x+s\omega$ für x und lässt s alle ganzen Zahlenwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so erhält man also durch Summation dieser Gleichungen, wenn $u_{\pm\infty} \times v_{\pm\infty} = 0$ angenommen wird:

$$0 = \Sigma(u_x \Delta v_x) + \Sigma(v_{x-\omega}\Delta u_x),$$

oder

(43) $$\Sigma(u_x \Delta v_x) = -\Sigma(v_{x-\omega}\Delta u_x).$$

Setzt man $u_x = x^m$, $v_x = \Delta^{n-1} g(x)$, so erhält man also nach diesem Theorem:

$$\Sigma x^m \Delta^n g(x) = -\Sigma \Delta x^m \Delta^{n-1} g(x-\omega),$$

und also wenn man diese Formel $k$mal benutzt,

(44) $$\Sigma x^m \Delta^n g(x) = (-1)^k \Sigma \Delta^k x^m \Delta^{n-k} g(x-k\omega).$$

Ist $n > m$, und man in dieser Formel $k = m$ setzt, bekommt man also, indem man bemerkt, dass

$$\Delta^m x^m = \underline{|m}$$

ist, die Formel

$$\begin{aligned}\Sigma x^m \Delta^n g(x) &= (-1)^m \underline{|m}\, \Sigma \Delta^{n-m} g(x-m\omega)\\ &= 0,\end{aligned}$$

immer vorausgesetzt, dass $g(\pm\infty) = 0$ ist.

Wird die Formel (42) mit x^r multipliziert, und man die Summation ausführt, bekommt man also

(45) $$\Sigma x^r F(x) = B_0 \Sigma x^r g(x) + B_1 \Sigma x^r \Delta g(x) + \cdots + B_r \Sigma x^r \Delta^r g(x).$$

Die übrigen Glieder rechter Seite verschwinden. Durch (45) werden sämtliche Koeffizienten bestimmt, und zwar durch ähnliche Formeln wie diejenigen, die für die Bestimmung der Koeffizienten in der Reihe (18) erhalten wurden. Man bekommt für B_r die Formel

(46) $$B_r = \Sigma T_r(x) F(x),$$

wo $T_r(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade r bezeichnet.

Wird nun nach einander $g(x)$, $\Delta g(x)$, $\Delta^2 g(x)$, $\cdots$, $\Delta^r g(x)$ nach der Formel (42) entwickelt, so bekommt man die Relationen

(47) $$\begin{aligned} 0 &= \Sigma T_r(x) g(x), \\ 0 &= \Sigma T_r(x) \Delta g(x), \\ 0 &= \Sigma T_r(x) \Delta^2 g(x). \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 &= \Sigma T_r(x) \Delta^r g(x), \end{aligned}$$

welche Gleichungen zur Bestimmung der Funktion $T_r(x)$ benutzt werden können.

Hier können wir $T_r(x)$ in der Form

$$T_r(x) = \delta_0^{(r)} x^r + \delta_1^{(r)} x^{r-1} + \cdots + \delta_{r-1}^{(r)} x + \delta_r^{(r)}$$

schreiben. Setzen wir

$$\varepsilon_{m,n} = \Sigma x^m \Delta^n g(x),$$

so bekommen wir nach (44) *für* $n > m$

$$\varepsilon_{m,n} = 0.$$

Ist dagegen $n \leqq m$, hat man nach (44), indem man daselbst $k = n$ setzt,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m,n} &= (-1)^n \Sigma \Delta^n x^m g(x - n\omega) \\ &= (-1)^n \Sigma \Delta^n (x + n\omega)^m g(x) \end{aligned}$$

Die $\varepsilon_{m.n}$ können also sämtlich mit Hülfe der Grössen

(47*) $$\varepsilon_m = \Sigma x^m g(x)$$

berechnet werden.

Die Gleichungen (47) bekommen nun folgende Form

$$0 = \varepsilon_{r0}\delta_0^{(r)} + \varepsilon_{r-1,0}\delta_1^{(r)} + \varepsilon_{r-2,0}\delta_2^{(r)} + \cdots + \varepsilon_{1,0}\delta_{r-1}^{(r)} + \varepsilon_{00}\delta_r^{(r)},$$
$$0 = \varepsilon_{r1}\delta_0^{(r)} + \varepsilon_{r-1,1}\delta_1^{(r)} + \varepsilon_{r-2,1}\delta_2^{(r)} + \cdots + \varepsilon_{1,1}\delta_{r-1}^{(r)},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$0 = \varepsilon_{r,r-1}\delta_0^{(r)} + \varepsilon_{r-1,r-1}\delta_1^{(r)},$$
$$1 = \varepsilon_{rr}\delta_0^{(r)}.$$

Für die niedrigsten Werte von r erhalten wir folgende Ausdrücke für die Grössen ε, δ und T

$$r = 0.$$

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_0\delta_0^{(0)} = 1,$$
$$\varepsilon_0 T_0 = 1.$$

$$r = 1$$

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_0^2\delta_0^1 = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0^2\delta_1^1 = \varepsilon_1;$$
$$\varepsilon_0^2 T_1 = -\varepsilon_0 x + \varepsilon_1.$$

$$r = 2.$$

$$\varepsilon_{21} = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{22} = 2\varepsilon_0,$$

woraus die Gleichungen

$$1 = 2\varepsilon_0\delta_0^{(2)},$$
$$0 = -(2\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_0^{(2)} + \varepsilon_0\delta_1^{(2)},$$
$$0 = \varepsilon_2\delta_0^{(2)} + \varepsilon_1\delta_1^{(2)} + \varepsilon_0\delta_2^{(2)}$$

zur Bestimmung von $\delta_0^{(2)}$, $\delta_1^{(2)}$ und $\delta_2^{(2)}$ hervorgehen.

Diese geben

$$\underline{|2}\,\varepsilon_0^3\delta_0^{(2)} = \varepsilon_0^2,$$
$$\underline{|2}\,\varepsilon_0^3\delta_1^{(2)} = -\varepsilon_0(2\varepsilon_1 + \varepsilon_0),$$
$$\underline{|2}\,\varepsilon_0^3\delta_2^{(2)} = -\varepsilon_2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_0,$$

so dass

$$\underline{|2}\,\varepsilon_0^3 T_2 = \varepsilon_0^2 x^2 - \varepsilon_0(2\varepsilon_1 + \varepsilon_0)x + \varepsilon_0\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0\varepsilon_2.$$

$$r = 3.$$

$$\varepsilon_{33} = -6\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{32} = 6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{31} = -3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 - \varepsilon_0,$$

woraus die Gleichungen

$$1 = -6\varepsilon_0\delta_0^{(3)},$$
$$0 = (6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_0)\delta_0^{(3)} + 2\varepsilon_0\delta_1^{(3)},$$
$$0 = -(3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_0^{(3)} - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_1^{(3)} - \varepsilon_0\delta_2^{(3)},$$
$$0 = \varepsilon_3\delta_0^{(3)} + \varepsilon_2\delta_1^{(3)} + \varepsilon_1\delta_3^{(3)} + \varepsilon_0\delta_3^{(3)}$$

hervorgehen, welche geben

$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4\delta_0^{(3)} = -\varepsilon_0^3,$$
$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4\delta_1^{(3)} = 3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\varepsilon_0^2,$$
$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4\delta_2^{(3)} = \varepsilon_0(3\varepsilon_2\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_0^2),$$
$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4\delta_3^{(3)} = \varepsilon_3\varepsilon_0^2 - 3\varepsilon_2\varepsilon_0^2 - 6\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0 + 6\varepsilon_1^3 + 6\varepsilon_1^2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1\varepsilon_0^2,$$

so dass

$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4 T_3 = -\varepsilon_0^3 x^3 + 3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\varepsilon_0^2 x^2$$
$$+ (3\varepsilon_2\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 x$$
$$+ \varepsilon_3\varepsilon_0^2 - 3\varepsilon_2\varepsilon_0^2 - 6\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0 + 6\varepsilon_1^3 + 6\varepsilon_1^2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1\varepsilon_0^2.$$

$$r = 4.$$

$$\varepsilon_{44} = 24\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{43} = -24\varepsilon_1 - 36\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{42} = 12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1 + 14\varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_{41} = -4\varepsilon_3 - 6\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 - \varepsilon_0.$$

Hieraus erhält man die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten $\delta_i^{(4)}$:

$$1 = 24\varepsilon_0\delta_0^{(4)},$$
$$0 = (24\varepsilon_1 + 36\varepsilon_0)\delta_0^{(4)} + 6\varepsilon_0\delta_1^{(4)},$$
$$0 = (12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1 + 14\varepsilon_0)\delta_0^{(4)} + (6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_0)\delta_1^{(4)} + 2\varepsilon_0\delta_2^{(4)},$$
$$0 = (4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_0^{(4)} + (3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_1^{(4)}$$
$$+ (2\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\delta_2^{(4)} + \varepsilon_0\delta_3^{(4)},$$
$$0 = \varepsilon_4\delta_0^{(4)} + \varepsilon_3\delta_1^{(4)} + \varepsilon_2\delta_2^{(4)} + \varepsilon_1\delta_3^{(4)} + \varepsilon_0\delta_4^{(4)}.$$

Diese geben

$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5\delta_0^{(4)} = \varepsilon_0^4,$$
$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5\delta_1^{(4)} = -4\varepsilon_1\varepsilon_0^3 - 6\varepsilon_0^4,$$
$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5\delta_2^{(4)} = -6\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 12\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 18\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 11\varepsilon_0^4,$$
$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5\delta_3^{(4)} = -4\varepsilon_3\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 + 18\varepsilon_2\varepsilon_0^3 - 24\varepsilon_1^3\varepsilon_0$$
$$-36\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 - 22\varepsilon_1\varepsilon_0^3 - 6\varepsilon_0^4,$$

$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5\delta_4^{(4)} = -\varepsilon_4\varepsilon_0^3 + 8\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon^3\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_2^2\varepsilon_0^2 - 36\varepsilon_2\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2$$
$$-36\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 - 11\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_1^4 + 36\varepsilon_1^3\varepsilon_0$$
$$+22\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_0^3\,.$$

Als Kontrolle für die Rechnung wurde die Formel

$$1 = \delta_0^{(4)}\{\varepsilon_4 + 4\varepsilon_3 + 18\varepsilon_2 + 52\varepsilon_1 + 75\varepsilon_0\}$$
$$+\delta_1^{(4)}\{\varepsilon_3 + 3\varepsilon_2 + 9\varepsilon_1 + 13\varepsilon_0\}$$
$$+\delta_2^{(4)}\{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_0\}$$
$$+\delta_3^{(4)}\{\varepsilon_1 + \varepsilon_0\}$$
$$+\delta_4^{(4)}\{\varepsilon_0\}\,,$$

die leicht erhalten wird, verifiziert.

Es ist also

$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5 T_4 = \varepsilon_0^4 x^4 - (4\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_0^4)x^3$$
$$+(-6\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 12\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 18\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 11\varepsilon_0^4)x^2$$
$$-(4\varepsilon_3\varepsilon_0^3 - 24\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 - 18\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_1^3\varepsilon_0$$
$$+36\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 22\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_0^4)x$$
$$-\varepsilon_4\varepsilon_0^3 + 8\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_3\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_2^2\varepsilon_0^2 - 36\varepsilon_2\varepsilon_1^2\varepsilon_0$$
$$-36\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 - 11\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_1^4 + 36\varepsilon_1^3\varepsilon_0$$
$$+22\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_0^3\,.$$

Setzen wir

$$\nu_s = \Sigma x^s F(x)\,,$$

so erhalten wir also nach (46) die folgenden Ausdrücke für die ersten Koeffizienten in der Reihe (42)

$$\varepsilon_0 B_0 = \nu_0\,,$$
$$\varepsilon_0^2 B_1 = \varepsilon_1\nu_0 - \varepsilon_0\nu_1\,,$$
$$\underline{|2}\,\varepsilon_0^3 B_2 = (-\varepsilon_2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_0)\nu_0 - \varepsilon_0(2\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\nu_1 + \varepsilon_0^2\nu_2\,,$$
$$\underline{|3}\,\varepsilon_0^4 B_3 = (\varepsilon_3\varepsilon_0^2 - 3\varepsilon_2\varepsilon_0^2 - 6\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0 + 6\varepsilon_1^3 + 6\varepsilon_1^2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1\varepsilon_0^2)\nu_0$$
$$+\varepsilon_0(3\varepsilon_2\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_0^2)\nu_1$$
$$+3\varepsilon_0^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\nu_2$$
$$-\varepsilon_0^3\nu_3\,,$$
$$\underline{|4}\,\varepsilon_0^5 B_4 = [-\varepsilon_4\varepsilon_0^3 + 8\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_3\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_2^2\varepsilon_0^2 - 36\varepsilon_2\varepsilon_1^2\varepsilon_0$$
$$-36\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 - 11\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_1^4 + 36\varepsilon_1^3\varepsilon_0$$
$$+22\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_0^3]\nu_0$$
$$-[4\varepsilon_3\varepsilon_0^3 - 24\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_0^2 - 18\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 24\varepsilon_1^3\varepsilon_0 + 36\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2$$
$$+22\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_0^4]\nu_1$$
$$+[-6\varepsilon_2\varepsilon_0^3 + 12\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 + 18\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 11\varepsilon_0^4]\nu_2$$
$$-[4\varepsilon_1\varepsilon_0^3 + 6\varepsilon_0^4]\nu_3 + \varepsilon_0^4\nu_4\,,$$

. . . .

Wenn die generierende Funktion $g(x)$ n unabhängige Parameter enthält, können im allgemeinen n von den Koeffizienten B_r zum Verschwinden gebracht werden, wodurch die praktische Konvergenz der Reihe vergrössert wird, was hier sagen will, dass die Funktion $F(x)$ durch eine geringere Zahl Glieder dargestellt wird. Einen Parameter kann man immer in der folgenden Weise einführen. Wenn eine Funktion $F(x)$ durch die Reihe (42) dargestellt werden soll, setzt man

$$F(cx) = B_0 g(x) + B_1 \Delta g(x) + B_2 \Delta_2 g(x) + \cdots,$$

wo

$$\Delta g(x) = g(x) - g(x-1)$$

u. s. w. Hier ist c ein noch unbestimmter Parameter. Wird diese Gleichung mit x_r multipliziert und man nacheinander $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ setzt und die Resultate addiert, hat man mit Summen von der Form

$$s_r = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^r F(cx) \tag{48*}$$

zu tun. Nun ist aber, wie man am leichtesten in geometrischer Weise findet, für nicht allzu grosse c die Summe

$$c \Sigma (cx)^r F(cx)$$

nahe von c unabhängig. Wird ihr Wert mit μ_r bezeichnet, so hat man also

$$c^r s_r = c\mu_r, \tag{48}$$

welche Gleichung erlaubt, über die Grösse c in bequemer Weise zu verfügen.

Als Beispiel an die Anwendung der Reihe (42) wollen wir zuerst

$$g(x) = y_x = \frac{\underline{|s}}{\underline{|b+x}\,\underline{|s-b-x}} p^{b+x} q^{s-b-x} \tag{49}$$

setzen. Hier ist y_x eine bekannte Funktion aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Es ist

$$p + q = 1$$

so dass y_x also 3 Parameter: b, s und p enthält. Es wird weiter angenommen, dass y_x für

$$b + x < 0 \text{ und für } b + x > s$$

verschwindet, so dass die obige analytische Definition von y_x nur im Gebiete

$$0 \leq b + x \leq s$$

Gültigkeit hat.

Die Funktion y_x nebst sämtlichen Ableitungen verschwindet also für $x = \pm \infty$. Wir können somit — vorausgesetzt, dass $F(x)$ auch dieselbe Eigenschaft hat für $x = \pm \infty$ zu verschwinden — die Gleichung

$$(50) \qquad F(cx) = B_0 y_x + B_1 \Delta y_x + B_2 \Delta^2 y_x + \cdots$$

ansetzen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten B_r hat man vor allen Dingen die Grössen

$$\varepsilon_r' = \Sigma x^r y_x$$

zu berechnen.

Aus der Theorie der Wahrscheinlichkeiten hat man bekanntlich die Relationen:

$$\begin{aligned}
\Sigma y_x &= 1 , \\
\Sigma(x + b)\, y_x &= sp , \\
\Sigma(x + b)^2 y_x &= s(s-1)p^2 + sp , \\
\Sigma(x + b)^3 y_x &= s(s-1)(s-2)p^3 + 3s(s-1)p^2 + sp , \\
\Sigma(x + b)^4 y_x &= s(s-1)(s-2)(s-3)p^4 + 6s(s-1)(s-2)p^3 \\
&\quad + 7s(s-1)p^2 + sp , \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Wir können hieraus die Werte der Grössen ε_0, ε_1, ε_2, ε_3. ε_4 u. s. w. und somit auch der Koeffizienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 u. s. w. berechnen. Wir wollen über die 4 Parameter b, s, p und c in der Weise verfügen, *dass die Koeffizienten* B_1, B_2, B_3 *und* B_4 *verschwinden.* Man hat dann

$$(51) \qquad F(x) = B_0 y_x + B_5 \Delta^5 y_x + B_6 \Delta^6 y_x + \cdots$$

Es ist nicht notwendig, die Werte der Koeffizienten B_1, B_2, B_3 und B_4 durch b, s, p und c auszudrücken. Es genügt, die Gleichung (51) mit x, x^2, x^3, x^4 zu multiplizieren und die erhaltenen Gleichungen zu addieren. Da nämlich

$$\Sigma x^m \Delta^n \gamma_x$$

für $n > m$ verschwindet, so bekommen wir somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= cB_0 \Sigma y_x , \\
\mu_1 &= c^2 B_0 \Sigma x y_x , \\
\mu_2 &= c^3 B_0 \Sigma x^2 y_x , \\
\mu_3 &= c^4 B_0 \Sigma x^3 y_x , \\
\mu_4 &= c^5 B_0 \Sigma x^4 y_x .
\end{aligned}$$

Wird B_0 mittelst der ersten Gleichung eliminiert, und setzt man zur Abkürzung

$$\nu_s = \frac{\mu_s}{\mu_0} ,$$

so lauten die Gleichungen nunmehr

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= c\ \Sigma x\ \ y_x , \\
\nu_2 &= c^2 \Sigma x^2 y_x , \\
\nu_3 &= c^3 \Sigma x^3 y_x , \\
\nu_4 &= c^4 \Sigma x^4 y_x ,
\end{aligned}$$

wo wir die Ausdrücke für $\Sigma x^r y_x$ einzuführen haben. Wir bekommen dann:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= c\ [sp - b] , \\
\nu_2 &= c^2 [s(s-1)p^2 + sp(1-2b) + b^2] , \\
\nu_3 &= c^3 [s(s-1)(s-2)p^3 + 3s(s-1)p^2 + sp \\
&\qquad - 3b(s(s-1)p^2 + sp) + 3b^2 sp - b^3] , \\
\nu_4 &= c^4 [s(s-1)(s-2)(s-3)p^4 + 6s(s-1)(s-2)p^3 \\
&\qquad + 7s(s-1)p^2 + sp - 4b(s(s-1)(s-2)p^3 \\
&\qquad\qquad + 3s(s-1)p^2 + sp) \\
&\qquad + 6b^2(s(s-1)p^2 + sp) - 4b^3 sp + b^4] .
\end{aligned}$$

Nach einigen Reduktionen können diese Gleichungen auf die Form

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= c\ [sp - b] , \\
\nu_2 &= \nu_1^2 + c^2 spq , \\
\nu_3 &= \nu_1^3 + 3\nu_1(\nu_2^2 - \nu_1^2) - c(\nu_2^2 - \nu_1^2) + 2cq(\nu_2^2 - \nu_1^2) , \\
\nu_4 &= 3c^4 s^2 p^2 q^2 + s[c^4 pq - 6c^4 p^2 q^2 + \\
&\qquad 4c^3 \nu_1 pq(1-2p) + 6c^2 \nu_1^2 pq] + \nu_1^4
\end{aligned}$$

gebracht werden.

Aus der dritten und der vierten dieser Gleichungen können mittelst einer Gleichung zweiten Grades c und cq berechnet werden, wonach s aus der zweiten und b aus der ersten Gleichung eindeutig bestimmt werden.

Es empfiehlt sich, den Anfangspunkt der x-Koordinaten so zu legen, dass $\nu_1 = 0$ ist. Die Gleichungen zur Bestim-

mung der Parameter vereinfachen sich dann und nehmen folgende Form an:

$$\begin{aligned} b &= sp\,, \\ \nu_2 &= c^2 spq\,, \\ \nu_3 &= c\nu_2 (q-p)\,, \\ \nu_4 &= 3\nu_2^2 - 6c^2\nu_2(q-q^2) + c^2\nu_2\,. \end{aligned}$$

Wir setzen $y = cq$ und erhalten aus der dritten Gleichung

$$c = 2y - \frac{\nu_3}{\nu_2}\,,$$

welcher Wert in die vierte Gleichung eingesetzt folgende Gleichung für y gibt:

$$(a) \qquad 0 = y^2 - \frac{\nu_3}{\nu_2} y + \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{2\nu_2} - \frac{\nu_3^2}{2\nu_2^2}\,.$$

Wenn diese Gleichung reelle Wurzeln hat und y irgend eine dieser Wurzeln bezeichnet, so werden die vier Parameter aus folgenden Gleichungen berechnet. Zuerst hat man

$$(b) \qquad c = 2y - \frac{\nu_3}{\nu_2}\,,$$

dann ist

$$(c) \qquad q = \frac{y}{c} \text{ und } p = 1 - \frac{y}{c},$$

weiter ist

$$(d) \qquad s = \frac{\nu_2}{cy - y^2} = \frac{\nu_2}{c^2 pq}\,.$$

und endlich

$$(e) \qquad b = sp\,,$$

womit die Bestimmung abgeschlossen ist.

Das Problem, die Parameter b, s, p, c so zu bestimmen, dass die Funktion y_x sich möglichst nahe an eine gegebene Funktion anschliesst, ist zuerst von PEARSON gelöst worden (Nature 1893, »Contributions to the mathematical theory of Evolution» II, 1895). Die Formel (51) gibt die bei dieser Darstellung notwendige Korrektion an $(B_5\Delta^5 y_x + B_6\Delta^6 y_x + \cdots)$.

So oft eine Funktion durch eine Reihe von der Form (51) dargestellt werden kann, so kann man auch im allgemeinen

mittelst der Funktion $\varphi(x)$ (22) dieselbe Funktion durch die Reihe (23) darstellen. Die Wahl zwischen diesen Darstellungsarten hängt wohl meistens von Bequemlichkeitsrücksichten ab, und, in Betracht der analytischen Natur der Funktion $\varphi(x)$, wird wohl in den meisten Fällen die Reihe (23) vorzuziehen sein.

Eine Darstellung ganz anderer Art bekommt man, wenn man die folgende Funktion $\psi(x)$ als erzeugende benutzt:

(52) $$\psi(x) = \frac{e^{-\lambda}\sin x\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{\lfloor 1\,(x-1)} + \frac{\lambda^2}{\lfloor 2\,(x-2)} - \cdots\right\}$$

wo λ einen Parameter bezeichnet.

Ich verweise in Bezug auf diese Funktion auf meine früher citirte Abhandlung: »Über die zweite Form des Fehlergesetzes». Hier will ich mich nur mit dem Fall aufhalten, dass man dem Argumente x einen *ganzen* Zahlenwert beilegt. Wir haben dann nach (52), so oft x einen ganzen *negativen* Zahlenwert $-r$ hat

(53*) $$\psi(-r) = 0,$$

und wenn x einen ganzen positiven Zahlenwert $+r$ hat

(53) $$\psi(r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{\lfloor r}.$$

Aus (53*) und (53) folgt, dass

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\psi(r) = 1$$

ist. Weiter hat man

$$r\psi(r) = \lambda\psi(r-1).$$

Wir erhalten aber, wenn wir wie gewöhnlich die Summen (in Bezug auf r) zwischen $-\infty$ und $+\infty$ rechnen:

$$\begin{aligned}
\Sigma r\ \psi(r) &= \lambda,\\
\Sigma r^2\psi(r) &= \lambda\Sigma r\psi(r-1)\\
&= \lambda\Sigma r(r-1)\psi(r-1) + \lambda\Sigma\psi(r)\\
&= \lambda^2 + \lambda,\\
\Sigma r^3\psi(r) &= \lambda\Sigma r^2\psi(r-1)\\
&= \lambda\Sigma(r-1+1)^2\psi(r-1)\\
&= \lambda(\lambda^2+\lambda) + 2\lambda^2 + \lambda\\
&= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda;
\end{aligned}$$

$$\Sigma r^4 \psi(r) = \lambda \Sigma r^3 \psi(r-1) = \lambda \Sigma (r+1)^3 \psi(r)$$
$$= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda,$$
u. s. w.

Die Grössen ε_m (47*) haben also hier die Werte

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1, \\ \varepsilon_1 &= \lambda, \\ \varepsilon_2 &= \lambda^2 + \lambda, \\ \varepsilon_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \varepsilon_4 &= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

woraus, nach früher mitgeteilten Formeln folgende Werte für die Koeffizienten in der Reihe

(54) $F(x) = B_0 \psi(x) + B_1 \Delta\psi(x) + B_2 \Delta^2 \psi(x) + B_3 \Delta^3 \psi(x) + \cdots,$

hervorgehen

$$\begin{aligned} B_0 &= \nu_0, \\ B_1 &= \lambda\nu_0 - \nu_1, \\ \underline{|2}\, B_2 &= \lambda^2 \nu_0 - (2\lambda + 1)\nu_1 + \nu_2, \\ \underline{|3}\, B_3 &= \lambda^3 \nu_0 - (3\lambda^2 + 3\lambda + 2)\nu_1 + 3(\lambda + 1)\nu_2 - \nu_3. \\ \underline{|4}\, B_4 &= \lambda^4 \nu_0 - (4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda + 6)\nu_1 + (6\lambda^2 + 12\lambda \\ &\quad + 11)\nu_2 - (4\lambda + 6)\nu_3 + \nu_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Über den Parameter λ kann man etwa so verfügen, dass B_1 verschwindet, man hat dann

$$\lambda\nu_0 - \nu_1 = 0$$

und

$$F(x) = B_0 \psi(x) + B_2 \Delta^2 \psi(x) + B_3 \Delta^3 \lambda(x) + \cdots$$

Man kann auch den Anfangspunkt der Koordinaten als einen Parameter einführen, wodurch erreicht werden kann, dass sowohl B_1 wie B_2 verschwindet. Eine einfache Überlegung zeigt uns, dass man die Reihe für $F(x)$ in der Form

$$F(x) = B_0 \psi(x-b) + B_1 \Delta\psi(x-b) + B_2 \Delta^2 \psi(x-b) + \cdots$$

schreiben kann, wo nunmehr

$$B_r = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, T_r(x-b)$$

ist.

Wenn wir also unter ν'_0, ν'_1 und ν'_2 die Momente der Funktion $F(x)$ in Bezug auf ein beliebiges Origo verstehen. wogegen ν_0, ν_1, ν_2, ν_3 u. s. w. die Momente der verschiedenen Ordnungen von $F(x)$ in Bezug auf den Punkt b bedeuten, so werden offenbar, wenn B_1 und B_2 verschwinden sollen b und λ aus den Formeln

$$0 = (\lambda + b)\nu'_2 - \nu'_1$$
$$0 = \lambda^2 \nu_0 - (2\lambda + 1)\nu_1 + \nu_2$$

erhalten. Man hat aber

$$\nu_0 = \nu'_0,$$
$$\nu_1 = \Sigma(x - b)F(x) = \nu'_1 - b\nu_0,$$
$$\nu_2 = \Sigma(x - b)^2 F(x) = \nu'_2 - 2b\nu'_1 + b^2 \nu'_0,$$

so dass die Gleichungen zur Bestimmung von λ und b die Form

$$0 = (\lambda + b)\nu'_0 - \nu'_1,$$
$$0 = \nu_0[(\lambda + b)^2 + b] - [2(\lambda + b) + 1]\nu'_1 + \nu'_2,$$

haben, aus welchen Gleichungen folgende Werte von λ und b hervorgehen.

$$\begin{cases} b = \dfrac{\nu'^2_1 + \nu_0\nu'_1 - \nu_0\nu'_2}{\nu_0^2}, \\[2ex] \lambda = \dfrac{\nu_0\nu'_2 - \nu'^2_1}{\nu_0^2}. \end{cases}$$

Die hier behandelten Formen für die erzeugenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der Wahrscheinlichkeiten, mit welcher ich mich zur Zeit beschäftige, gewählt worden. Für andere Zwecke können andere Hilfsfunktionen vonnöten sein. Im besonderen muss die Aufgabe anders behandelt werden, wenn die zu entwickelnde Funktion $F(x)$ für reelle x-Werte unendlich oder diskontinuierlich werden kann.



Tryckt den 30 december 1905.

Uppsala 1905. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 2. N:O 29.

ÜBER DIE ATTRAKTION ZWEIER FESTEN CENTRA AUF EINEN BEWEGLICHEN PUNKT UND DIE BEZIEHUNG DIESES PROBLEMS ZUM PROBLEM DER ZWEI KÖRPER

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

PARIS
LIBRAIRIE H. LE SOUDIER
174 BOULEVARD S:T GERMAIN

1906

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 2. N:o 29.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium.

NO 28

Über die Attraktion zweier festen Centra auf einen beweglichen Punkt und die Beziehung dieses Problems zum Problem der zwei Körper.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mitgeteilt am 6. Dezember 1905.

Wird die Masse, die in dem einen Centrum gelegt ist, gleich Null gesetzt, zo geht das Problem von der Bewegung eines Punktes, der von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetz attrahiert wird[1], in ein gewöhnliches Zwei-Körper-Problem über. Es ist vom Interesse zu studieren, wie sich die Bewegungsgleichungen dabei gestalten werden.

Es handelt sich also um die Bewegung eines massenlosen Körpers, die von zwei festen Centren attrahiert wird, von denen das eine eine Masse gleich K, das andere eine Masse Null besitz. Die Lage des zweiten Centrums kann willkürlich gewählt werden. Indem wir beachten, dass bei den zwei Centren Problem die Abstände r und r' von den beiden festen Centren als die geeignesten Koordinaten auftreten, so findet man, dass die Bewegungsgleichungen sich offenbar am einfachsten gestalten werden, wenn man das massenlose Centrum in den zweiten Fokus der Kepler'schen Ellipse verlegt. Indem wir bemerken, dass eine andere Annahme unter Umständen vor-

[1] Wir wollen im Folgendem dies Problem kurz Zwei-Centren Problem nennen.

teilhaft sein kann, wollen wir mit diesem speziellen Fall anfangen.

In Bezug auf die Bezeichnungen verweise ich auf den dritten Abschnitt meiner Vorlesungen über die Mechanik des Himmels. Es handelt sich um den Fall, dass die Masse K' gleich Null gesetzt wird. Die Bewegung geschieht dann in einem Kegelschnitt. Die Masse K liegt in einem Fokus dieses Kegelschnittes.

Ist die Bahn eine Ellipse so hat man es mit den im § 6 behandelten periodischen Bewegungen zu tun. Die Wurzeln r_1 und r_2 müssen denselben Wert — a — haben, und man hat

$$\lambda = a, \tag{1}$$

wo a der halben grossen Achse der Ellipse gleichkommt. Zur Bestimmung von μ hat man das intermediäre Integral

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{2(\mu^2 - c^2)(K\mu - h_1\mu^2 + \alpha)}. \tag{2}$$

Da die Gleichung für λ die *doppelte* Wurzel a besitzt, hat man

$$Ka - h_1 a^2 + \alpha = 0,$$

$$K - 2h_1 a \qquad = 0,$$

so dass (2) die Form

$$(a^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{2(c^2 - \mu^2)h_1(a - \mu)^2}$$

besitzt, oder

$$\frac{(a + \mu)\,d\mu}{\sqrt{2h_1(c^2 - \mu^2)}} = -dt. \tag{2*}$$

Hier führt man die Hülfsgrösse w durch die Formel

$$\frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = -dw$$

ein, welche Gleichung durch die Relation

$$\mu = -c\cos w \tag{3}$$

befriedigt wird. Hieraus bekommt man

$$(a - c\cos w)\,dw = \sqrt{2h_1}\,dt = an\,dt,$$

wenn

$$\sqrt{2h_1} = an \qquad (4)$$

gesetzt wird.

Man hat also

$$w - \frac{c}{a}\sin w = nt + c, \qquad (5)$$

oder

$$w - e\sin w = nt + c = M \qquad (5^*)$$

wo e die Exceentricität der Bahnellipse bedeutet.

Es bedeutet also hier w die *excentrische Anomalie* in der elliptischen Bewegung.

Die Lösung des Zwei-Körper-Problems ist also durch die Formeln.

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= a, \\ \mu &= -ae\cos w, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

gegeben.

Die Abstände r und r' des beweglichen Körpers von der Masse K und von dem massenlosen Centrum K' sind durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} r &= \lambda + \mu = a(1 - e\cos w), \\ r' &= \lambda - \mu = a(1 + e\cos w) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

gegeben.

Da nach (5*) $w - M$ eine periodische Funktion von M, mit der Periode 2π, ist, so lassen sich λ und μ und also auch r und r' als periodische Funktionen derselben Grösse — M — darstellen.

Die wahre Anomalie — v — wird in folgender Weise durch die elliptischen Koordinaten λ und μ ausgedrückt. Man hat

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{(\lambda + c)(c + \mu)}{(\lambda - c)(c - \mu)}}, \qquad (8)$$

welche Formel nach Einsetzung der Wert (6) in die gewöhnliche Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w$$

übergeht.

Von den Elementarperioden sind hier ω_{11} und ω_{12} gleich Null. Die Determinante Ω verschwindet also. Für die Periode der Bewegung bekommt man

$$2T = 2\int_{+e}^{+e} \frac{(a+\mu)\,d\mu}{\sqrt{2h_1(c^2-\mu^2)}} = \frac{2a\pi}{\sqrt{2h_1}},$$

mit der Formel IV § 4 (16) übereinstimmend.

Wird die fingierte Masse K' (die gleich Null ist) nicht in den leeren Fokus gelegt, so gestaltet sich die Behandlung folgendermaassen.

Liegt erstens K' *innerhalb* der Bahnellipse, so hat man den Fall I c vor den Augen. Man hat dann

$$(9)\quad R(\lambda) = 2(\lambda^2-c^2)(K\lambda-h_1\lambda^2+\alpha) = 2h_1(\lambda^2-c^2)(r_1-\lambda)(\lambda-r_2)$$

und λ oscilliert zwischen den Werten r_1 und r_2, die beide grösser als c sind.

Folglich ist nun

$$(9')\quad S(\mu) = 2(\mu^2-c^2)(K\mu-h_1\mu^2+\alpha) = 2h_1(c^2-\mu^2)(r_1-\mu)(r_2-\mu),$$

so dass μ zwischen $-c$ und $+c$ hin und her schwankt.

Man hat es zunächst mit der Reduktion der beiden Differentiale

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} \quad \text{und} \quad \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}$$

auf die Normalform zu thun.

Diese beiden Differentiale sind zu ihrer Form identisch, nur muss man darauf Acht nehmen, dass λ zwischen r_1 und r_2, dagegen μ zwischen $-c$ und c variieren muss. Im Anschluss dazu setzt man

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda = \frac{r_2 - c\,m_1 y_1}{1 - m_1 y_1},$$

$$(10^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mu = \frac{c - r_2 m_2 y_2}{1 - m_2 y_2},$$

wo

$$m_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - c},$$

$$m_2 = \frac{2c}{r_2 + c}.$$

Indem y_2 von 1 bis 0 abnimmt, wächst μ von $-c$ zu $+c$. Man bekommt dann in der Tat

$$
\begin{aligned}
(1-m_1y_1)(r_1-\lambda) &= r_1-r_2-m_1y_1(r_1-c)=(r_1-r_2)(1-y_1),\\
(1-m_1y_1)(\lambda-r_2) &= m_1y_1(r_2-c),\\
(1-m_1y_1)(\lambda-c) &= r_2-c,\\
(1-m_1y_1)(\lambda+c) &= r_2+c-2cm_1y_1=(r_2+c)(1-k^2y_1),
\end{aligned}
$$

wo

$$k^2=\frac{2c}{r_2+c}\cdot\frac{r_1-r_2}{r_1-c}=m_2m_1$$

gesetzt wird. Da weiter

$$d\lambda=\frac{m_1(r_2-c)dy_1}{(1-m_1y_1)^2},$$

ist, so bekommt man

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}=\frac{dy_1}{\sqrt{2h_1(r_2+c)(r_1-c)y_1(1-y_1)(1-k^2y_1)}}.$$

Aus der zweiten Substitution (für μ) bekommt man

$$
\begin{aligned}
(1-m_2y_2)(r_1-\mu) &= r_1-c-m_2y_2(r_1-r_2)=(r_1-c)(1-k^2y_2),\\
(1-m_2y_2)(r_1-\mu) &= r_2-c,\\
(1-m_2y_2)(c-\mu) &= m_2y_2(r_2-c),\\
(1-m_2y_2)(c+\mu) &= 2c-m_2y_2(c+r_2)=2c(1-y_2),
\end{aligned}
$$

wo

$$k^2=m_1m_2$$

und also denselben Wert wie vorher hat.

Da weiter

$$d\mu=\frac{m_2(c-r_2)dy_2}{(1-m_2y_2)^2}$$

ist, so hat man also

$$\frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}=\frac{dy_2}{\sqrt{2h_1(r_2+c)(r_1-c)y_2(1-y_2)(1-k^2y_2)}}.$$

Für den komplementären Modul k' bekommt man den Wert

$$k'=\sqrt{\frac{(r_2-c)(r_1+c)}{(r_2+c)(r_1-c)}}.$$

Die Halbperioden ω_{ij} haben den Wert

$$\omega_{11} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}; \quad \omega_{21} = \int_{-c}^{+c} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}$$

$$\omega_{12} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad \omega_{22} = \int_{-c}^{+c} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}},$$

und offenbar hat man

$$\omega_{12} = \omega_{22} = \frac{1}{\sqrt{2h_1(r_2+c)(r_1-c)}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}} = \frac{2K}{\sqrt{2h_1(r_2+c)(r_1-c)}},$$

wo K dass vollständige elliptische Integral erster Gattung, Modul k, bezeichnet, so dass also

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

ist.

Setzt man

$$y_1 = sn^2 w_1, \quad y_2 = sn^2 w_2,$$

so dass

$$\frac{dy_1}{\sqrt{y_1(1-y_1)(1-k^2y_1)}} = 2dw_1,$$

$$\frac{dy_2}{\sqrt{y_2(1-y_2)(1-k^2y_2)}} = 2dw_2$$

ist, und führt man die Bezeichnung

$$g = \tfrac{1}{2}\sqrt{2h_1(r_2+c)(r_1-c)}$$

ein so hat man

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} = \frac{1}{g} dw_1; \quad \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = \frac{1}{g} dw_2,$$

und unsere Differentialgleichungen lauten nunmehr

$$(11) \qquad \begin{aligned} \lambda^2 dw_1 + \mu^2 dw_2 &= g dt, \\ dw_1 + \quad dw_2 &= 0, \end{aligned}$$

wo

$$\lambda = \frac{r_2 - cm_1 sn^2 w_1}{1 - m_1 sn^2 w_1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

$$\mu = \frac{c - r_2 m_2 sn^2 w_2}{1 - m_2 sn^2 w_2}. \quad \ldots \ldots \ldots (11^*)$$

Man kann λ^2 nach den Cosinus der Vielfachen von w_1, und μ^2 in eine ähnliche Reihe nach den Vielfachen von w_2 entwickeln. Setzt man

$$\lambda^2 = C_0 + 2\Sigma C_i \cos i w_1,$$

$$\mu^2 = D_0 + 2\Sigma D_i \cos i w_2,$$

so haben die konstanten Glieder, C_0 und D_0, die Werte

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \lambda^2 dw_1 = \frac{g}{\pi}\omega_{11},$$

$$D_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mu^2 dw_2 = \frac{g}{\pi}\omega_{21}.$$

Die Integrale von (11) können folglich in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{11}w_1 + \omega_{21}w_2 + \frac{2\pi}{g}\sum\frac{1}{i}C_i \sin i w_1 + \frac{2\pi}{g}\sum\frac{1}{i}D_i \sin i w_2 = \pi(t+\beta_1), \\ &\omega_{21}w_1 + \omega_{22}w_2 = \pi\beta_2 \end{aligned}\right\} (12)$$

geschrieben werden.

Führt man hier die Hülfsgrössen u_1 und u_2 mittelst der Formeln

$$\left.\begin{aligned} \omega_{11}u_1 + \omega_{21}u_2 &= \pi(t+\beta_1), \\ \omega_{12}u_1 + \omega_{22}u_2 &= \pi\beta_2 \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots (12^*)$$

ein, so lassen sich folglich w_1 und w_2 als bedingt periodische Reihen von u_1 und u_2 darstellen, und zwar wird

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= u_1 + \text{per. Reihe in } u_1 \text{ und } u_2, \\ w_2 &= u_2 + \qquad \text{d:o.} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (13)$$

Wird mittelst der Gleichung

$$w_1 + w_2 = \frac{\pi}{\omega_{22}}\beta_2$$

w_2 aus (13) eliminiert, so erscheint w_1 als eine bedingt periodische Funktion von u_1 und $\frac{\pi\beta_2}{\omega_{22}}$, mit der Periode 2π.

Die Auflösung der Gleichungen (12) geschieht nach ähnlichen Methoden, wie bei der Auflösung der KEPLER'schen Gleichung,

Um die wahre Länge — v — in der Bahn als Funktion der Zeit darzustellen benutzt man die Relation:

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos v$$

welche gibt

$$1 + \cos v = \frac{[r' - (r - 2c)](r' + r - 2c)}{4cr}$$

$$1 - \cos v = \frac{[-r' + (r + 2c)][r' + (r + 2c)]}{4cr}$$

oder in Betracht der Relationen

$$r + r' = 2\lambda,$$

$$r - r' = 2\mu,$$

$$1 + \cos v = \frac{(c - \mu)(\lambda - c)}{c(\lambda + \mu)},$$

$$1 - \cos v = \frac{(c + \mu)(\lambda + c)}{c(\lambda + \mu)},$$

woraus

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{(c + \mu)(\lambda + c)}{(c - \mu)(\lambda - c)}}$$

hervorgeht. Setzt man hier die Werte von λ und μ ein, erhält man, nach einigen Reduktionen und unter Anwendung der Formeln

$$sn^2(w - K) = \frac{cn^2 w}{dn^2 w},$$

$$cn^2(w - K) = \frac{k'^2 sn^2 w}{dn^2 w},$$

die Gleichung

$$(14)\quad \ldots \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{(r_2 + c)(r_1 + c)}{(r_2 - c)(r_1 - c)}} \cdot \frac{sn w_2 dn w_1}{cn w_2}.$$

Wenn der Punkt K' sich dem leeren Fokus der Bahnellipse nähert, geht $r_1 - r_2$ — und also auch der Modul k — gegen Null, und man bekommt in *Limes*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} w_2 .$$

Die Hülfsgrösse w_2 hat hier Nichts mit der excentrischen Anomalie zu tun. Der Zusammenhang von w_2 mit der Zeit wird durch die Formel

$$(a^2 - \mu^2)\, dw_2 = -g\, dt ,$$

wo

$$\mu = \frac{ae - a\dfrac{2e}{1+e}\sin^2 w_2}{1 - \dfrac{2e}{1+e}\sin^2 w_2}$$

ist, gegeben. Offenbar ist die excentrische Anomalie vor w_2 vorzuziehen.

Es fragt sich, ob eine ähnliche Substitution überhaupt vortheilhafter sei, auch wenn r_1 nicht mit r_2 zusammenfällt.

In den Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} + \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} &= dt \\ \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} + \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

würde man zu dem Zweck die Substitutionen

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)}} = dw_1$$

$$\frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = dw_2$$

tun, welche geben

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{r_1 - r_2}{2} \cos w_1 ,$$

$$\mu = -c \cos w_2 ,$$

welche Werte dann in die Differentialgleichungen (15) einzusetzen sind. Man würde zwar auch hier die Hülfswinkel

als Funktionen der Zeit darstellen können, da aber die Relation zwischen w_1 und w_2 viel verwickelter ist, so ist die vorige Metode vorzuziehen.

Wenden wir uns zuletzt zum Falle, dass K' *ausserhalb* der vom Planeten beschriebenen Bahn liegt, so ist die untere Grenze von λ dann gleich c; die obere Grenze mögen wir mit r_1 bezeichnen. Was μ betrifft so ist dann, vorausgesetzt dass $\mu = r - r'$ ist, die untere Grenze gleich $-c$, die obere Grenze kann einen beliebigen Wert sei es r_2 haben, wo $c > r_2 > -c$ ist.

Man hat dann

$$R(\lambda) = 2h_1(r_1 - \lambda)(\lambda - c)(\lambda - r_2)(\lambda + c),$$

$$S(\mu) = 2h_1(r_1 - \mu)(c - \mu)(r_2 - \mu)(\mu + c),$$

und hier schwankt periodisch λ zwischen r_1 und c, μ zwischen r_2 und $-c$. Man hat also hier die Substitutionen

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{c - r_2 m_1 y}{1 - m_1 y}, \\ \mu = \dfrac{r_2 - c m_2 y}{1 - m_2 y}, \end{cases}$$

wo

$$m_1 = \frac{r_1 - c}{r_1 - r_2},$$

$$m_2 = \frac{r_2 + c}{c + c},$$

$$k^2 = m_1 m_2.$$

Sowohl k^2 wie m_1 und m_2 sind kleiner als die Einheit.

Die weitere Verfolgung des Problems ist dem vorigen Falle analog.

Wird das Problem in drei Dimensionen ausgeführt, was in ähnlicher Weise geschehen kann, so können diese Auseinandersetzungen zur Bestimmung der Elemente eines Doppeltsternsystem benutzt werden.

Tryckt den 2 mars 1906.

Uppsala 1906. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 3. N:o 4.

ÜBER DIE ACCELERATION DER MITTLEREN BEWEGUNG DER KOMETEN

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A. B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE H. LE SOUDIER
174 BOULEVARD S:T GERMAIN

1906

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 3. N:o 4.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

NO 29

Über die Acceleration der mittleren Bewegung der Kometen

von

C. V. L. CHARLIER.

Eingereicht am 14. März 1906.

Obgleich die NEWTON'sche Gravitationstheorie bis jetzt alle Schwierigkeiten in der Erklärung der Bewegung der Planeten siegreich überwunden hat,[1] und zwar unter alleiniger Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehung der Planeten auf einander, so treten bei den Kometen einige eigentümliche Bewegungsverhältnisse auf, bei deren Erklärung man der Gravitationstheorie fremde Hypothesen heranziehen zu müssen geglaubt hat. In einigen Fällen (z. B. bei dem ENCKE'schen und dem BIELA'schen Kometen) hat man die Annahme gemacht, dass im Weltraum ein Mittel existiert, das den Kometen in ihren Bewegungen einen Widerstand leistet, in anderen Fällen (z. B. bei dem von SVEDSTRUP berechneten Kometen 1886 I) hat man eine durch den Lichtdruck hervorgebrachte abstossende Kraft zur Hülfe gezogen um die beobachteten Orte des Kometen in Übereinstimmung mit der Theorie zu bringen.

In der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Lund (1904) habe ich, gelegentlich eines Vortrages des Herrn Professor v. HEPPERGER über den BIELA'schen Kometen,

[1] Die von LEVERRIER gefundene Anomalie in der Bewegung des Merkur-Perihels bleibt indessen immer noch räthselhaft.

darauf aufmerksam gemacht, dass es möglich wäre, die sekulare Beschleunigung der Kometen ohne Zuhilfenahme eines widerstehenden Mittels zu erklären. Die diesbezüglichen Auseinandersetzungen wurden bei der betreffenden Gelegenheit in geometrischer Weise nach der Methode von AIRY in seinen klassischen Vorlesungen »On gravitation» vorgeführt. Zweck der vorliegenden Untersuchung ist, denselben Gedanken analytisch zu behandeln.

In seiner Abhandlung vom Jahre 1776 »Sur l'altération des moyens mouvements des planètes» hat LAGRANGE zuerst bewiesen, dass, vorausgesetzt, dass es sich um die Störungen der ersten Ordnung der Massen handelt, keine sekularen Glieder in der halben grossen Achse — somit auch keine ähnlichen Glieder in der mittleren Bewegung — vorkommen können. Sein Beweis ist streng gültig, wenn nur die mittleren Bewegungen der Planeten nicht kommensurabel sind. Dieser Ausnahmefall wird auch von LAGRANGE hervorgehoben, nur bemerkt er: »mais il est facile de se convaincre que ce cas ne peut pas avoir lieu dans notre système.» Dies ist aber gerade der Fall bei einem Kometen, der im Begriffe steht, sich in zwei oder mehrere Kerne aufzulösen. Offenbar hat man es dann mit Körpern zu tun, welche *alle dieselbe mittlere Bewegung* besitzen. Der Beweis von LAGRANGE verliert dann seine Gültigkeit und sekulare Glieder können in der halben grossen Achse zum Vorschein kommen.

Wir nehmen vorläufig an, dass es sich um zwei Körper A und B handelt, die sich in einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegen. Die ungestörte Bahn der beiden Körper möge durch dieselbe halbe grosse Achse (a), dieselbe Excentricität (e) und dieselbe Perihellänge (π) charakterisirt sein, nur die Epochelängen c und c' der beiden Körper seien verschieden, wobei indessen angenommen wird, dass die Differenz $c - c'$ ein sehr kleiner Winkel ist. Die Massen m und m' der beiden Körper A und B seien so klein, dass die Einwirkung, welche der eine Körper auf die Bewegung des anderen ausübt, sehr klein ist, so dass die gestellte Aufgabe als ein Störungsproblem behandelt werden kann.

Man kann sich dann derselben Differentialgleichung bedienen, von welcher sich LAGRANGE bei der Ableitung seines berühmten Theorems benutzt hat. Dieselbe lautet für den Körper A

(1) $$\frac{d\frac{1}{2a}}{dt} = - m' \frac{\partial \Omega}{\partial t},$$

und für B

(2) $$\frac{d\frac{1}{2a'}}{dt} = - m \frac{\partial \Omega'}{\partial t'},$$

wo

(1*) $$\Omega = \frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos (v - v')}{r'^3},$$

(2*) $$\Omega' = \frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos (v - v')}{r^3},$$

und die partiellen Ableitungen von Ω und Ω' so zu verstehen sind, dass die Differentiation nach der Zeit, insofern sie in den Ausdrücken für die elliptischen Koordinaten des *gestörten* Körpers vorkommt, geschieht. Es ist also

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

Weiter ist

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos (v - v')$$

$$\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial r} = r - r' \cos (v - v'),$$

$$\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial v} = rr' \sin (v - v'),$$

so dass

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = - \frac{r - r' \cos (v - v')}{\Delta^3} - \frac{\cos (v - v')}{r'^2},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = - \frac{rr' \sin (v - v')}{\Delta^3} + \frac{rr' \sin (v - v')}{r'^3}.$$

und da

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{a (1 - e^2)}\,; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{e \sin (v - \pi)}{\sqrt{a (1 - e^2)}}$$

ist, so ist also

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = - \left(\frac{r - r' \cos (v - v')}{\Delta^3} + \frac{\cos (v - v')}{r'^2} \right) \frac{e \sin (v - \pi)}{\sqrt{a (1 - e^2)}}$$
$$+ \left(- \frac{rr' \sin (v - v')}{\Delta^3} + \frac{rr' \sin (v - v')}{r'^3} \right) \frac{\sqrt{a (1 - e^2)}}{r^2}.$$

Die Entwickelung der negativen Potenzen des Abstandes geschieht in diesem Falle folgenderweise.

Man hat

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(v - \pi),$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e\cos(v' - \pi),$$

woraus

$$r' - r = -\frac{2e}{p} rr' \sin\frac{1}{2}(v - v') \sin\left(\frac{1}{2}(v + v') - \pi\right)$$

erhalten wird. Diese Gleichung gibt

$$r'^2 + r^2 - 2rr' = \frac{4e^2}{p^2} r^2 r'^2 \sin^2\frac{1}{2}(v - v') \sin^2\left(\frac{1}{2}(v + v') - \pi\right)$$

und da ausserdem

$$2rr'(1 - \cos(v - v')) = 4rr' \sin^2\frac{1}{2}(v - v')$$

ist, so bekommt man durch Summieren

$$(3) \quad \Delta^2 = 4rr' \sin^2\frac{1}{2}(v - v')\left[1 + \frac{e^2}{p^2} rr' \sin^2\left(\frac{1}{2}(v + v') - \pi\right)\right].$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{\left|\sin\frac{1}{2}(v - v')\right|}{\Delta}$$

in eine FOURIER'sche Reihe nach den Vielfachen von $v - \pi$ und $v' - \pi$ entwickelt werden kann. Es ist wohl zu beachten, dass man hier *den absoluten Betrag* von $\sin\frac{1}{2}(v - v')$ einführen muss, da Δ eine wesentlich positive Grösse bezeichnet. Führt man die Winkel

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(v - v')$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(v + v') - \pi$$

ein, so lässt sich also $\frac{da}{dt}$ in folgender Form schreiben

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{|\sin^3 \gamma_1|} \Sigma A \sin(i\gamma_1 + j\gamma_2) + \Sigma B \sin(i\gamma_1 + j\gamma_2). \tag{4}$$

Diese Entwickelung lässt sich für jeden Wert der Excentricität erhalten. Der weiteren Behandlung des Problems in analytischer Weise stellen sich nicht unbedeutende Schwierigkeiten in den Weg, wenn $c - c'$ klein und e verhältnismässig gross ist. Für hinreichend kleine Werte von e lässt sich die Behandlung des Problems leicht analytisch durchführen.

Man kann dann die rechte Seite von (4) in eine FOURIER'sche Reihe mit den beiden Argumenten

$$\frac{1}{2}(c - c')$$

und l (der mittleren Anomalie des einen Körpers) entwickeln, wobei man zu beachten hat, dass

$$\frac{1}{|\sin^3 \gamma_1|} = \frac{1}{\left|\sin^3 \frac{1}{2}(c - c')\right|} \times R$$

ist, wo R eine FOURIER'sche Reihe der genannten Art bezeichnet.

Der sekulare Teil dieser Entwickelung hat die Form

$$\frac{A}{\sin^2 \frac{1}{2}(c - c')} + \frac{B}{\sin \frac{1}{2}(c - c')} + C_0 + C_1 \sin \frac{1}{2}(c - c') + C_2 \sin \tfrac{1}{2}(c - c') + \cdots$$

Es zeigt sich nämlich, dass keine Glieder, die im Nenner $\sin \frac{1}{2}(c - c')$ zur *dritten* Potenz erhoben enthalten, vorkommen können.

Für $e = 0$ verschwinden alle Koeffizienten in dieser Entwickelung mit Ausnahme von A und C_1.

Das erste Glied in dieser Reihe ist das bedeutendste, wenn die Körper einander sehr nahe liegen, und da die Massen sehr klein angenommen worden sind, so muss der Abstand zwischen den beiden Körpern sehr klein sein, damit sie einen merkbaren Einfluss auf einander ausüben können. Man kann deswegen im Allgemeinen bei der Berechnung der sekularen Störungen sich auf das erste Glied beschränken.

Aus dem Ausdrucke für $\frac{\partial\Omega}{\partial t}$ bekommt man unmittelbar den folgenden Wert dieses Gliedes für $e = 0$.

$$\frac{d\frac{1}{2a}}{dt} = m' \frac{\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}(c-c')}{4a^3\left|\sin^3\frac{1}{2}(c-c')\right|}. \tag{5}$$

Da

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{na^2}\frac{d\frac{1}{2a}}{dt},$$

erhält man hieraus den folgenden Wert der Beschleunigung — δn — der mittleren Bewegung.

$$\delta n = m' \frac{3n^2\sin\frac{1}{2}(c-c')}{4\left|\sin^3\frac{1}{2}(c-c')\right|}t. \tag{6}$$

Ist $c > c'$, so ist δn positiv. Wir sind also zum folgenden Schluss gelangt:

Wenn zwei Körper A und B sich nahe einander in derselben Ellipse um die Sonne bewegen, so wird die mittlere Bewegung des vorhergehenden Körpers durch die Anziehung des nachfolgenden Körpers eine Acceleration erhalten, und umgekehrt wird die mittlere Bewegung des nachfolgenden Körpers eine Retardation erleiden infolge der Anziehung des vorhergehenden Körpers.

Diese Sätze lassen sich leicht in geometrischer Weise ableiten.

Der numerische Betrag dieser Störungen ist

für den vorhergehenden Körper (A):

$$\delta n = \frac{m' 3n^2 t}{4\sin^2\frac{1}{2}(c-c')} \tag{7}$$

für den nachfolgenden Körper (B):

$$\delta n' = -\frac{m 3n^2 t}{4\sin^2\frac{1}{2}(c-c')}. \tag{8}$$

Wird der Abstand der beiden Körper verdoppelt, so geht die Acceleration, bezw. Retardation, auf ein Viertel ihres vorigen Wertes herunter. Je kleiner der Abstand, desto grösser ist die Veränderung der mittleren Bewegung der beiden Körper. Man würde geneigt sein hieraus zu folgern, dass diese Acceleration, bezw. Retardation, am grössten wäre — ja sogar unendlich gross sei — wenn der Abstand der beiden Körper verschwindend ist, was offenbar widersinnig wäre. Dieser Schluss ist aber nicht erlaubt, und zwar aus einem doppelten Grund. Erstens haben wir ausdrücklich vorausgesetzt, dass der Abstand der beiden Körper so gross ist, dass man die Aufgabe als ein Störungsproblem behandeln kann; ist die Masse der beiden Körper sehr klein, braucht doch der Abstand der beiden Körper nicht sehr gross zu sein. Zweitens bemerke ich, dass bei Körpern mit solcher Konstitution wie sie die Kometen wahrscheinlich besitzen, der störende Körper, wenn man ihn wie eine Totalität auffasst, als ein Schwarm von kleinen Körpern zu betrachten ist, und dass also, so lange der eigentliche Kometenkern sich in diesem Schwarm befindet, die störende Masse als veränderlich zu betrachten ist, und zwar würde man annähernd

$$m' = k(c - c')^3$$

setzen können, wo k eine Konstante bezeichnet. Aus (6) findet man, dass in einem solchen Falle δn dem Wert $c - c'$ direkt proportional ist, so dass für $c - c' = 0$ die Störung in der mittleren Bewegung gleich Null ist und mit $c - c'$ allmählich wächst, bis sie ihr Maximum erhält, wenn der Kern eben den Schwarm los geworden ist. Von da ab wird die Acceleration infolge der Anziehung des Schwarmes abnehmen, und zwar im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate des Abstandes zwischen dem Kern und dem Schwarm.

Dass eine Acceleration (bezw. Retardation) der hier behandelten Art bei den Kometen vorkommen muss, ist unzweifelhaft. Hieraus folgt aber nicht ohne Weiteres, dass die bei verschiedenen Kometen beobachtete Acceleration, bezw. Retardation, in der mittleren Bewegung tatsächlich in dieser Weise ihre Erklärung findet. Verschiedene Umstände sprechen aber dafür, dass dem der Fall ist.

Wir wollen zuerst versuchen die ungefähre Grössenord-

nung der Kometenmasse (oder richtiger der Masse des abgesonderten Meteorschwarmes) zu bestimmen.

Bei dem nach ihm genannten Kometen hat ENCKE gefunden, dass der Komet infolge der Acceleration in der mittleren Bewegung $2^1/_2$ Stunden früher zum Perihel wiederkehrt als er tun würde, wenn die mittlere Bewegung einen konstanten Wert hätte. Die Umlaufszeit wird also für jeden Umlauf $2^1/_2$ Stunden kürzer.

Wie gross muss die vom Kometen abgesonderte Masse sein, um eine solche Verkürzung der Umlaufszeit zu verursachen?

Die Frage lässt sich nicht ohne eine eingehende Behandlung des vorhandenen Beobachtungsmaterials eindeutig beantworten. Man kann aber den *Minimalwert der Masse* bestimmen, wobei ich aber hier noch die Voraussetzung machen will, dass die für kleine Werte der Excentricität geltende Formel (6) hier angewandt werden kann, und dass die Einwirkung der abgesonderten Masse am grössten ist, wenn die abgesonderte Masse die äussere Grenze der sichtbaren Kometenhülle eben verlässt. Die beiden letztgenannten Voraussetzungen kann man durch eine mehr eingehende mathematische Behandlung des Problems los werden.

Ich habe in den obigen Formeln vorausgesetzt, dass die Sonnenmasse als Einheit für die Massen angenommen worden ist, und dass ausserdem die Attraktionskonstante k^2 gleich Eins gesetzt ist. Nimmt man ausserdem die Sonnenweite als Einheit für die Abstände, so ist die Zeiteinheit gleich

$$\frac{365.24}{2\pi} = 58.13 \text{ mittlere Sonnentage,}$$

die ich *kanonische Zeiteinheit* (verkürzt k. E.) nennen will. Ein mittlerer Sonnentag ist also gleich 0.01720 k. E.

Die Verkürzung der Umlaufszeit des ENCKE'schen Kometen beträgt mithin 0.00179 k. E.

Die Umlaufszeit selbst beträgt 3.3 Jahre oder 20.7 k. E., und die mittlere Bewegung ist 0.303.

Hieraus bekommt man zur Bestimmung der Masse m' die Gleichung

$$m' \frac{3n^2T^2}{4\sin^2\frac{1}{2}(c-c')} = 0.303 \times 0.00179 = 0.000542 ,$$

oder

$$m' = \frac{0.00179\,n}{3\,(2\pi)^2} \sin^2(c - c') .$$

Würde der Durchmesser des Kometen $2'$ betragen, so würde also

$$\frac{1}{m'} = 2.57 \times 10^{12}$$

sein.

Eine Kometenmasse von dieser Grössenordnung ist *a priori* gar nicht unwahrscheinlich. Ich will hiermit natürlich nicht behauptet haben, dass die Masse des ENCKE'schen Kometen (oder des von diesem Kometen abgesonderten Meteorschwarmes) gerade diesen Wert hat. Es geht aber aus dem Obigen hervor, dass eine Masse von dieser Grösse in einem Abstande von $a \sin(c—c') = \frac{1}{1550}$ astronomischen Einheiten einem Kometen folgend eine Acceleration in der mittleren Bewegung hervorrufen würde, von derselben Ordnung wie die beim ENCKE'schen Kometen beobachtete Acceleration.

Man könnte gegen die obige Berechnung die Bemerkung machen, dass die hier gemachte Annahme, dass der störende Körper sich gerade an der Grenze des sichtbaren Kometen befinden würde, willkürlich sei, und dass man nicht berechtigt sei, hieraus auf den Maximalwert der abgesonderten Masse einen Schluss zu ziehen. Im Besonderen ist nicht unmittelbar einleuchtend, dass man das Recht hat, die Aufgabe für den betreffenden Abstand als ein Störungsproblem zu behandeln. Die folgenden Erwägungen können dazu dienen, diese Fragen zu beleuchten.

Wenn ein Anziehungsproblem nach der Methode der Störungstheorie behandelt werden darf, und wenn nicht, ist nicht leicht streng zu beantworten. So viel kann man doch behaupten, dass eine ähnliche Behandlung im Allgemeinen nicht erlaubt ist, wenn sich die beiden Körper A und B einander näher befinden als

$$a \sqrt[3]{\frac{m + m'}{3}}, \tag{9}$$

welcher der Wert des Abstandes von m zum Librations-

zentrum L_1 oder L_2[1] ist. Ist der Abstand zwischen A und B von dieser Grössenordnung oder grösser, so wird wohl im Allgemeinen eine Störungsrechnung durchführbar sein. Die Lage des Librationspunktes in diesem Falle ist vom Werte der Masse m des Kometenkerns abhängig. Setzt man beispielsweise $m = 10m'$ (so dass $\times \frac{1}{11}$ der Kometenmasse abgetrennt worden ist) so bekommt man

$$a\sqrt[3]{\frac{m+m'}{3}} = \frac{1}{4000},$$

so dass die Librationsgrenze innerhalb des Kometen liegen würde. Im dreifachen Abstande des Librationszentrums wäre man schon berechtigt die Störungsmethoden zu benutzen.

Würde die Masse des Kometen 1000 m' betragen, so würde dass Librationszentrum sich im Abstande

$$\frac{1}{860}$$

befinden, eine Grösse, die immer noch von derselben Ordnung wie der angenommene Radius des Kometen ist.

Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, dass man aus der Ausdehnung des Kometen einen Aufschluss über die *Masse* des Kometen erhalten kann. Da nämlich im Librationspunkt die auflösende Kraft der Sonne und die zusammenhaltende Kraft des Kometen sich gegenseitig aufheben, kann man erwarten, dass die eigentliche Kometenmasse unweit des Librationspunktes die äussere Grenze hat. Nach (9) würde man dann die Masse eines Kometen genähert durch die Formel

$$(10) \qquad m = 3\left(\frac{\rho}{a}\right)^3$$

berechnen können, wo ρ den Radius des Kometen bezeichnet. Nach HOUZEAUS »Vade-Mecum de l'Astronome» S. 785 soll G. CALANDRELLI schon 1808 sich eines ähnlichen Prinzips bedient haben, um die Masse der Kometen zu berechnen.

[1] Man vergleiche meine Vorlesungen über »Die Mechanik des Himmels» II, S. 99.

Ich habe im Vorhergehenden angenommen, dass vom Kometenkern *A* sich ein Körper *B* losgetrennt hat und durch seine Anziehung auf *A* die Acceleration bezw. Retardation des Kometen verursacht. In der Natur würde sich die Sache wohl ungefähr in der folgenden Weise gestalten.

Indem sich der Komet seinem Periheldurchgang nähert, wächst die auflösende Kraft der Sonne und kleine Meteore werden in immer wachsender Menge vom Kometen losgerissen. Nach dem Periheldurchgang ist der Komet somit von einem Schwarm solcher Körper begleitet. Ein Teil geht dem Kometen in seiner Bahn voraus und sucht seine mittlere Bewegung zu verlangsamen, ein anderer Teil der Meteore folgt dem Kometen in seiner Bahn nach und verursacht allmählich eine Beschleunigung der mittleren Bewegung des Kometenkerns. Je nach dem Übergewicht des einen oder des anderen Teiles wird die resultierende Einwirkung des Meteorschwarmes eine Acceleration oder eine Retardation des Kometen zur Folge haben.

Ist die Bahn des Kometen *elliptisch*, so dass er periodisch zum Perihel wiederkehrt, so kann man sich entweder denken, dass der einmal abgesonderte Schwarm seine accelerierende bezw. retardierende Einwirkung auch bei den folgenden Umläufen ausübt, oder — was wahrscheinlicher vorkommt — man kann sich die Sache so vorstellen, dass bei jedem Periheldurchgang sich ein neuer Schwarm vom Kometen losreisst, jedesmal eine Veränderung in der mittleren Bewegung verursachend. In beiden Fällen kann man erwarten, dass die Einwirkung der losgetrennten Teile auf die Bewegung des Kometen mit der Zeit an Intensität abnimmt. Es liegt auch von diesem Standpunkte aus nichts Räthselhaftes darin, dass — wie man beim Encke'schen Kometen beobachtet hat — hier und da *sprungweise* Veränderungen in der mittleren Bewegung vorkommen können, ja dass bei einigen Apparitionen eine Beschleunigung in der mittleren Bewegung ganz ausbleibt. Im Besonderen ist zu erwarten, dass die Bahn der Kometen *vor und nach dem Periheldurchgang* verschieden ist, wie man tatsächlich bei mehreren Kometen beobachtet hat.

Das für unsere Auffassung des Universums Wichtige in der hier gegebenen Erklärung liegt teils darin, dass der *Widerstand im Weltraum* gegen die Bewegung der Himmels-

körper als eine unnötige Hypothese aufgegeben werden kann, noch ist es nötig für die Erklärung der Bewegung einiger Kometen einen hypothetischen *Lichtdruck*, von der Sonne ausgehend, einzuführen. Teils wird es nunmehr möglich, eine direkte *Bestimmung der Masse der Kometen* auszuführen, ein Problem, das so vielen Bemühungen der Astronomen früher gespottet hat.

Tryckt den 13 augusti 1906.

Uppsala 1906. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK

UTGIFVET AF

K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM

BAND 4. N:o 2.

EIN TRANSFORMATIONSTHEOREM IN DER MECHANIK

VON

C. V. L. CHARLIER



UPPSALA & STOCKHOLM

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN	LONDON	PARIS
R. FRIEDLÄNDER & SOHN	WILLIAM WESLEY & SON	LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 CARLSTRASSE	28 ESSEX STREET. STRAND	11 RUE DE LILLE

1907

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 2.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 30

Ein Transformationstheorem in der Mechanik.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mitgeteilt am 11. September 1907.

In seiner hinterlassenen Abhandlung »Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existiert, und über die Theorie der Störungen» (Werke Bd. V) hat JACOBI folgendes Theorem bewiesen:

»Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ *durch die Gleichungen gegeben:*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$

es sei ferner

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

eine willkürliche Funktion der m Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *und der m neuen Grössen* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; *bestimmt man diese neuen Grössen und die m anderen neuen Grössen* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus* $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ *vermittelst der Gleichungen*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

und drückt H durch t und diese neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m;$ $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die ganz ähnlichen Gleichungen:*

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).»$$

Dies Theorem, das in allgemeiner Weise den Übergang von einem System kanonischer Koordinaten zu einem anderen vermittelt, werde ich in zwei verschiedenen Richtungen erweitern.

Erstens braucht das Theorem insofern verallgemeinert zu werden, als im JACOBI'schen Transformationstheorem vorausgesetzt wird, dass die Funktion ψ, welche den Übergang zwischen den beiden kanonischen Elementen vermittelt, von der Zeit unabhängig ist. Man kann indessen diese Voraussetzung fallen lassen, und es zeigt sich, dass man dann zum folgenden Transformationstheorem gelangt:

Theorem I: Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m;$ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *durch die Gleichungen gegeben*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo H eine willkürliche Funktion der Grösse $x_1, x_2, \ldots, x_m;$ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *und t bezeichnet; es sei ferner*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t)$$

eine willkürliche Funktion der m Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *und der m neuen Grössen* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *und der Zeit; bestimmt man diese neuen Grössen und die m anderen neuen Grössen* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus* $x_1, x_2, \ldots, x_m;$ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *und t vermittelst der Gleichungen*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \tag{5}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i \tag{5*}$$

und drückt H durch t und diese neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die Gleichungen:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i} \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}$$

ist.»

Ist ψ von t unabhängig, kommt man offenbar auf das JACOBI'sche Theorem zurück.

Der Beweis geschieht ohne Kunstgriffe, indem man mittelst der Gleichungen (5) und (5*) in H x_i und y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) gegen ξ_i und η_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) vertauscht. Ich führe indessen den Beweis hier aus.

Werden die Gleichungen (5) und (5*) nach x_i und y_i aufgelöst, bekommt man

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m; t),$$
$$y_i = y_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m; t),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Setzt man diese Werte in H ein, so geht diese Funktion in eine Funktion von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ und t über. Wird diese Funktion nach η_k differentiiert, so sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ und t als Konstanten zu betrachten und wir bekommen somit

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}$$

oder nach (4)

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}.$$

Aus (5) folgt aber

$$\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \eta_k},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \sum_j \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}$$

oder, wenn man in der ersten Summe den Index i gegen j vertäuscht und in der Doppelsumme die Summationsordnung wechselt,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \left[-\frac{dy_j}{dt} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right]$$

Wird aber die Gleichung (5) nach der Zeit differentiiert, so bekommt man

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum_j \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t}.$$

Der Koeffizient von $d\xi_i : dt$ ist gleich

$$-\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i}.$$

Wird aber die Gleichung (5*) nach η_k differentiiert, erhält man

$$0 = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \quad (i \neq k)$$

wogegen

$$-1 = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k},$$

und also ist

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{d\xi_k}{dt} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}.$$

Setzt man

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

so ist also

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_k} . \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

womit die erste Gleichung (6) bewiesen ist.

Um die entsprechende Gleichung für $d\eta_k : dt$ zu erhalten verfährt man in ähnlicher Weise.

Zuerst bekommt man

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i'}{\partial \xi_k}$$

$$= -\sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial x_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} .$$

Aus der Gleichung (5) erhält man die Relationen

$$\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k} ,$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} ,$$

welche, in dem obigen Ausdruck für $\partial H : \partial \xi_k$ eingesetzt, geben:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\sum_i \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k} . \quad ,$$

Die Doppelsumme kann in eine einfache Summe verwandelt werden, wenn man bemerkt, dass aus der Gleichung (5*)

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

durch Differentiation nach ξ_k die Gleichung

$$0 = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k}$$

folgt. Es ist also

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{d\xi_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{dx_j}{dt} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Andererseits ist aber nach (5*)

$$-\frac{d\eta_k}{dt} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\frac{d\eta_k}{dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Folglich ist

$$\frac{d\eta_k}{dt} = -\frac{\partial \left(H + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{\partial \xi_k},$$

womit der zweite Teil des Transformationstheorems bewiesen ist.

Der Übergang von einem System kanonischer Koordinaten zu einem anderen ist durch die Funktion ψ völlig bestimmt. Man kann diese Transformation auch in anderer Weise definieren.

Ist H_1 irgend eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$, so ist durch die Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

ein von $2\,m$ Integrationskonstanten abhängiges Wertensystem von $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ definiert, das wir als *eine zu* (1) *gehörende intermediäre Kurve* bezeichnen wollen.

Statt (8) können wir die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung

$$(9) \qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial t} + H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_m}\right)$$

betrachten. Ist

$$V = V(t; x_1, x_2, \ldots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

ein Integral dieser Gleichung, so erhält man das Integral von (8) aus den Relationen

$$(10) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ist die charakteristische Funktion H_1 — wie ich hier voraussetze — von t unabhängig, können wir setzen

$$V = -Ct + W,$$

und erhalten für W die Gleichung

$$C = H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_m}\right).$$

Nach (10) können wir nun die Integrale von (8) in der Form

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t - \beta_i$$

schreiben.

Diese Gleichungen zeigen nach dem Transformationstheorem von JACOBI, dass

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

$$-\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1, -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2, \ldots, -\frac{\partial C}{\partial \alpha_m} t + \beta_m$$

konjugierte kanonische Koordinaten sind und zwar kann man das ursprüngliche System (1) durch die Gleichungen

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w_i}; \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, m)$$

ersetzen, wo

$$w_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t + \beta_i$$

ist.

So oft ein System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ von Integrationskonstanten gefunden worden ist, kann man in unendlich verschiedenen Weisen andere Systeme von Integrationskonstanten finden. Zu jedem System der Grössen α_i gehört ein bestimmtes System der Grössen w_i. Es gilt die vorteilhafteste Wahl der Grössen α_i zu treffen.

Unter den vielen intermediären Bahnen, die man für ein mechanisches Problem aufstellen kann, will ich hier solche ins Auge fassen, in welchen die Koordinaten als bedingt periodische Funktionen der Zeit erscheinen. Mittelst einer linearen Transformation der Argumente kann man bewirken, dass die Perioden in Bezug auf die verschiedenen Winkelkoordinaten gleich 2π ist. Wir nennen diese Argumente η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_m$, so dass

$$\eta_i = n_i t + c_i \ (i = 1,\ 2, \ldots, m)$$

ist und die Koordinaten in der intermediären Bahn periodische Funktionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ sind mit der Periode 2π. Wählt man nun die Integrationskonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, α_m in solcher Weise, dass

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}$$

ist und nennen diese Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, so dass nunmehr

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i}$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\eta_i$$

und folglich sind ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ konjugierte kanonische Koordinaten.

Wie sollen diese Konstanten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ gefunden werden?

Ist die intermediäre Bahn eine bedingt periodische Bahn von der Art, die STÄCKEL zuerst untersucht hat, welche Bahn ich in meinen Vorlesungen über die Mechanik des Himmels ausführlich kommentiert habe, so ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem II: »Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_m$ *durch die Gleichungen gegeben:*

$$(11)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i};\quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Es sei ferner eine intermediäre Bahn durch die Gleichungen definiert

$$(12)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i};\quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

wo H_1 *eine quadratische Form der Grössen* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *ist. Wenn diese Differentialgleichungen mittelst der in meinen Vorlesungen II § 1 auseinandergesetzten Methode integriert werden können, so erscheinen die Koordinaten der intermediären Bahn als periodische Funktionen mit der Periode* 2π *der* m *Argumente*

$$\eta_i = n_i t + c_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i} t + c_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

wo ξ_i *mit den Bezeichnungen des zitierten Paragraphen durch die Relation*

$$\xi_i = \frac{1}{\pi}\int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2\psi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} 2\alpha_j \varphi_{ij}(x)}\ dx$$

efiniert ist. Drückt man dann H durch t und diese neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die Gleichungen

$$(14) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).»$$

Die KEPLER'sche Ellipse ist eine intermediäre Bahn der genannten Art. Wendet man auf dieselbe das obige Theorem an, so gelangt man zu Elementen, die mit den bekannten DELAUNAY'schen Elementen verwandt sind.

Als intermediäre Bahn kann man in einigen Problemen diejenige Bahn benutzen, welche *ein massenloser Körper beschreibt, der von zwei festen Zentren nach dem Newton'schen Gesetz angezogen wird.*

Im dritten Abschnitt der »Vorlesungen» habe ich die dabei auftretenden Bahnformen ausführlich behandelt. Nach dem obigen Theorem bekommt man hier

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \sqrt{2((K+K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha)}\, \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}, \\[2ex] \xi_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_2}^{b_2} \sqrt{2((K-K')\mu + h\mu^2 + \alpha)}\, \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \end{cases}$$

wo a_1 und b_1 die Grenzen sind, zwischen denen die Grösse λ schwankt, wogegen a_2 und b_2 die entsprechenden Grenzen für μ sind.

Die Winkelgrössen η_1 und η_2 ergeben sich aus den Relationen:

$$(15^*) \qquad \begin{aligned} \pi(t + \beta_1) &= \omega_{11}\eta_1 + \omega_{21}\eta_2, \\ \pi\beta_2 &= \omega_{12}\eta_1 + \omega_{22}\eta_2. \end{aligned}$$

wo man hat:

$$\omega_{11} = \frac{\partial \xi_1}{\partial h}, \quad \omega_{21} = \frac{\partial \xi_2}{\partial h},$$

$$\omega_{12} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}, \quad \omega_{22} = \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}.$$

Im *asteroidischen Drei-Körper-Problem* eignet sich in vielen Fällen die zuletzt behandelte intermediäre Bahn zu benutzen. Wir wollen von diesem Gesichtspunkte aus einen Blick auf dies Problem werfen. Nach IX § 2 in den »Vorlesungen» lauten die Differentialgleichungen für das asteroidische Drei-Körper-Problem

(16) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$(i = 1, 2),$$

wo

(16*) $$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + n(p_1 q_2 - p_2 q_1) - U$$

ist. Hier bedeuten q_1 und q_2 die rechtwinkligen Koordinaten des massenlosen Körpers auf ein bewegliches Koordinatensystem — mit der Drehungsgeschwindigkeit n — bezogen. Die Grösse n fällt mit der Winkelgeschwindigkeit in der kreisförmigen Bewegung von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt zusammen. Übrigens verweise ich auf die Bezeichnungen im betreffenden Paragraphen.

Der Anfangspunkt der Koordinaten ist hier in den Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 gelegt. Um eine vollständige Analogie mit dem Zwei-Zentren-Problem zu erhalten, legen wir das Origo im Mittelpunkt der Linie $m_1\, m_2$. Zu diesem Zweck setzen wir

$$x_1 = q_1 + \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$$

$$x_2 = q_2, \quad y_1 = p_1, \quad y_2 = p_2.$$

Die neuen Koordinaten x_1, x_2, y_1, y_2 sind offenbar auch kanonisch, so dass

(17) $$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$(i = 1, 2),$$

und hier ist

$$(17^*) \qquad H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + n(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \frac{n(1-\mu)}{2(1+\mu)} y_2 - U$$

und

$$U = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2}}.$$

Wir definieren nun eine intermediäre Bahn durch die charakteristische Funktion

$$(18) \qquad H_1 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - U.$$

Die entsprechenden Differentialgleichungen für x_1, x_2, y_1, y_2

$$(18^*) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}$$

$$(i = 1,\ 2)$$

fallen mit den Differentialgleichungen für die Bewegung eines massenlosen Körpers, der von zwei festen Zentren mit den Massen 1 und μ nach dem NEWTON'schen Gesetz angezogen wird, zusammen. (Man vergleiche »Vorlesungen» I. § 7). Die Koordinaten dieser Bahn sind bedingt periodische Funktionen der Zeit, welche in FOURIER'sche Reihen nach den Vielfachen der in (15*) definierten Grössen η_1 und η_2 entwickelt werden können. Die Koeffizienten in diesen Reihen können als Funktionen der Grössen ξ_1 und ξ_2 in (15) ausgedrückt werden. Nachdem x_1, x_2, y_1, y_2 in dieser Weise als Funktionen von ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 gefunden sind, setzt man diese Ausdrücke in H ein und bestimmt die Veränderungen der Grössen ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 nach dem JACOBI'schen Transformationstheorem vermittelst der Gleichungen

$$(19) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i},$$

$$(i = 1,\ 2)$$

Hier ist indessen zu bemerken, dass die Grösse H_1 nach der Substitution der Ausdrücke für x_1, x_2, y_1, y_2 durch ξ_1,

ξ_2, η_1, η_2 sich auf eine Funktion von ξ_1 und ξ_2 reduziert, da ja die Gleichungen (18*) das Integral $H_1 = Constans$ besitzen. Nennt man diese Konstante C_1, hat man also nach (17*) und (18*)

$$H = C_1 + n(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \frac{n(1-\mu)}{1+\mu} y_2. \tag{20}$$

Dies ist also der einfache Ausdruck für die Störungsfunktion, wenn man vom Zwei-Zentren-Problem ausgeht und nachher die willkürlichen Konstanten dieses Problems variiert.

Die Grösse C_1 ist eine Funktion nur von ξ_1 und ξ_2. Die übrigen Glieder in (20) sind periodische Funktionen von η_1 und η_2, die leicht zu berechnen sind, nachdem x_1, x_2, y_1, y_2 durch ξ_1, ξ_2, η_1 und η_2 ausgedrückt worden sind. Die Störungsfunktion ist also sehr leicht zu bilden, nachdem die Koordinaten im Zwei-Zentren-Problem als Funktionen der Zeit dargestellt worden sind, welche Darstellung indessen verschiedene Untersuchungen erfordert, die bis jetzt nicht ausgeführt worden sind. Sehr bemerkenswert ist, dass man bei der Anwendung dieser intermediären Bahn eine Störungsfunktion erhält, *in welcher der invertierte Wert des Abstandes zwischen dem gestörten und dem störenden Körper nicht mehr zum Vorschein kommt.*

Es folgt hieraus, dass das Zwei-Zentren-Problem einen innigen Zusammenhang mit dem Problem der drei Körper haben muss.



Tryckt den 28 december 1907.

Uppsala 1907. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:o 4.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

EINE NEUE METHODE
ZUR BEHANDLUNG DES ROTATIONSPROBLEMS

VON

C. V. L. CHARLIER

MIT 2 TEXTFIGUREN

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 4.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 21

Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mit 2 Textfiguren.

Eingereicht am 9. Oktober 1907.

Schon POISSON führte bei der Behandlung des Rotationsproblems die Methode der Variation der Constanten ein, und gelang dadurch zu Differentialgleichungen für das Problem, die ganz analoger Natur waren wie die bekannten Differentialgleichungen für das Drei-Körper-Problem. In seiner »Théorie analytique du système du Monde» ist PONTÉCOULANT von den POISSON'schen Differentialgleichungen ausgegangen um die Theorie der Rotation der Planeten zu untersuchen. Er hat aber thatsächlig kaum einen Gebrauch dieser Differentialgleichungen gemacht, sondern kommt bei der Behandlung der Frage von der Rotation der Erde und des Mondes auf die gewöhnlichen von LAGRANGE und LAPLACE benutzten Integrationsmethoden zurück. Hierdurch geht aber jede Analogie mit dem Problem der drei Körper verloren, und man kann nicht die vielen tiefgehenden Untersuchungen über dieses Problem für das Rotationsproblem verwerthen, was aber möglich ist, wenn man in consequenter Weise die Methode der Variation der Constanten durchführt.

Die Erklärung dieses Mangels an Consequenz in der Behandlung des Rotationsproblems ist übrigens unschwer zu finden. Das ungestörte Rotationsproblem ist nämlich bedeutend mehr verwickelt als die ungestörte elliptische Bewegung, die bei der Behandlung des Drei-Körper-Problems zum Ausgangspunkt gewählt wird. Die mathematischen Schwierigkeiten sind zwar nicht grösser in dem einen Problem als in dem anderen; sind aber die drei Trägheitsmomente von einander verschieden — wie beispielsweise beim Mond — so sind die nothwendigen Entwicklungen sehr umständlich und die Ableitung des Ausdruckes für die Störungsfunction wird sehr lästig.

In meinen Vorlesungen dieses Jahres über die Rotation der Himmelskörper habe ich diese Schwierigkeiten in sehr einfacher Weise vermieden. Als »intermediäre Bahn» — um einen vom Drei-Körper-Problem geliehenen Ausdruck zu benutzen — betrachte ich die Rotation eines *kugelförmigen* Körpers. Die Bewegungsverhältnisse sind dann möglichst einfach und hängen von 6 willkürlichen Constanten ab. Diese Constanten werden dann variirt, so dass man den Abweichungen des Körpers von der Kugelgestalt und den äusseren Kräften Rechnung trägt. Das Potential der äusseren Kräfte lässt sich durch diese Veränderlichen in *endlicher* Form ausdrücken; übrigens sind die Bewegungsgleichungen ganz ähnlichen Art wie im Drei-Körper-Problem.

Der Gang der Rechnung ist die folgende:

1) Zuerst betrachtet man die Bewegung einer *kugelförmigen* Körpers und drückt das Integral durch sechs unabhängige Constanten aus.

2) Zweitens variirt man diese Constanten, so dass die Abweichungen von der Kugelform und die äusseren Kräfte berücksichtigt werden.

Ich will nach einander folgende drei Probleme untersuchen:

I. Rotation eines kugelförmigen Körpers.

II. Rotation eines beliebigen festen Körpers ohne Einwirkung äusseren Kräfte.

III. Gleichzeitige Berücksichtigung der Abweichungen von der Kugelgestalt und der Einwirkung äusseren Kräfte.

In diesen Aufsatze wird das erste dieser Probleme behandelt und werden die allgemeinen Variationsgleichungen aufgestellt.

Die Bewegungsgleichungen, die wir bei der Betrachtung des Problems benutzen wollen, sind die folgenden.

Die Coordinaten einer Massenelements des Körpers bezogen auf im Raume festliegende Achsen, mit dem Anfangspunkt im Schwerpunkt des Körpers bezeichnen wir mit X, Y, Z.

Die Coordinaten desselben Massenelements in Bezug auf drei mit den Körper festverbundene Achsen bezeichnen wir mit x, y, z. Diese Achsen denken wir uns mit den drei Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallend. Die Trägheitsmomente um die Achsen x, y, z bezeichnen wir *bez.* mit A, B und C.

Die Lage der beiden Achsensysteme zu einander wird durch drei EULER'sche Winkel φ, θ und ψ bestimmt, deren geometrische Bedeutung aus der Figur 1 hervorgeht. Man hat

$$\psi = B'X,$$
$$\theta = zZ,$$
$$\varphi = B'x.$$

Die Wahl der EULER'schen Winkel ist übereinstimmend mit TISSERAND getroffen, um directe Vergleichung mit seinen Formeln zu erhalten.

Indem wir die Bewegungsgleichungen in canonischer Form schreiben, werden φ, θ und ψ als q-Coordinaten gewählt, so dass

$$q_1 = \varphi, \; q_2 = \theta, \; q_3 = \psi$$

und für die entsprechenden p-Coordinaten erhält man die Ausdrücke

$$p_1 = C\left[-\cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right],$$

$$p_2 = (B - A)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + (B\sin^2\varphi + A\cos^2\varphi)\frac{d\theta}{dt},$$

$$p_3 = [A\sin^2\varphi\sin^2\theta + B\cos^2\varphi\sin^2\theta + C\cos^2\theta]\frac{d\psi}{dt}$$
$$+ (B - A)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$- C\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo die *characteristische Function* H die Form

$$H = T - U$$

hat, wo T die lebendige Kraft des rotirenden Körpers und U das Potential der äusseren Kräfte ist. Für T hat man den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2A}\left[(p_1 \cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2 \cos\varphi\right]^2 \\ & + \frac{1}{2B}\left[(p_1 \cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2 \sin\varphi\right]^2 \\ & + \frac{1}{2C} p_1^2. \end{aligned}$$

[Man vergleiche TISSERAND: Traité de Mécanique céleste, II s. 380].

Indem wir die Grössen

$$(2)\qquad k_1 = \frac{C - A}{A}, \quad k_2 = \frac{C - B}{B}$$

einführen, können wir T in der Form

$$\begin{aligned} 2CT = & \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \cos\theta}{\sin^2\theta} + p_2^2 \\ & + k_1\left[(p_1 \cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2 \cos\varphi\right]^2 \\ & + k_2\left[(p_1 \cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2 \sin\varphi\right]^2 \end{aligned}$$

schreiben.

Wird

$$(3)\qquad T = T_0 + k_1 T_1 + k_2 T_2$$

gesetzt, so hat man also

(4)
$$2CT_0 = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta}{\sin^2\theta} + p_2^2,$$
$$2CT_1 = \left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2\cos\varphi\right]^2,$$
$$2CT_2 = \left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2\sin\varphi\right]^2.$$

Was endlich die Potentialfunction U betrifft, so hat sie die Form

(5)
$$U = \frac{3\mu}{2r^3}[Ak_1\cos^2\alpha + Bk_2\cos^2\beta],$$

wo α, β (und γ) die Winkel bezeichnen, welche der Radius Vector r des störenden Körpers mit den Hauptträgheitsachsen A. B (und C) bilden.

Sind mehrere störenden Körper vorhanden, kommt im Ausdrucke für U eine Summe von Gliedern vor, welche alle die obige Form haben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen gehen wir zur Behandlung des Rotationsproblems über.

Rotation eines kugelförmigen Körpers.

Hier ist $k_1 = k_2 = 0$. Folglich verschwindet U und man bekommt

(6)
$$H = T_0 = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta}{2C\sin^2\theta} + \frac{p_2^2}{2C}.$$

Das Problem der Rotation eines kugelförmigen Körpers ist ja ein sehr einfaches. Bekanntlich ist die Lösung, dass der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Achse rotirt, die im Raume und im Körper eine feste Lage hat. Wir müssen indessen mit einiger Ausführlichkeit auf die geometrischen Einzelkeiten dieses Rotationsproblems eingehen, um eine klare Vorstellung der Integrationsconstanten zu erhalten, welche wir der folgenden Behandlung der Rotationsprobleme zu Grunde legen werden.

Die Differentialgleichungen der Bewegung

$$(1)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T_0}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wollen wir mit Hülfe der HAMILTON-JACOBI'schen partiellen Differentialgleichung integriren. Diese lautet

$$(7)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + T_0 = 0$$

oder

$$(7^*)\qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2C\sin^2\theta}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)^2 + 2\frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{\partial V}{\partial q_3}\cos\theta\right] + \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2.$$

Ist

$$V = V(t;\ q_1, q_2, q_3;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

ein Integral dieser Gleichung, wo α_1, α_2 und α_3 drei unabhängige Integrationsconstanten bezeichnen, so erhält man die Integrale von (1) aus den Relationen:

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo β_1, β_2 und β_3 drei neue Integrationsconstanten bezeichnen.

Da die Gleichung (7*) die Grössen t, q_1 und q_3 nicht explicite enthält, so können wir die Substitution

$$(9)\qquad V = -ht + \alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_3 + W$$

machen, wo h, α_1 und α_3 drei Integrationsconstanten bezeichnen. Zur Bestimmung von W erhalten wie die Relation

$$\frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta}{\sin^2\theta} + \left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 = 2hC.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass h eine *positive* Grösse ist, vorausgesetzt dass α_1 und α_3 reelle Constanten sind. Wir setzen demnach

$$\alpha_2^2 = 2hC, \tag{10}$$

wo α_2 unter den genannten Voraussetzungen eine reelle Grösse bezeichnet. Für W erhalten wir den Ausdruck

$$W = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}. \tag{11}$$

Nach (8) erhalten wir hieraus folgende Gleichungen zur Bestimmung der EULER'schen Winkel:

$$(12)\quad \begin{aligned} \varphi &= \beta_1 - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1 + \int \frac{(\alpha_1 + \alpha_3\cos\theta)\, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}}, \\ \psi &= \beta_3 - \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3 + \int \frac{(\alpha_3 + \alpha_1\cos\theta)\, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}}, \\ &\int \frac{\alpha_2 \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}} = \frac{\alpha_2}{C} t + \beta_2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung giebt uns θ als Function der Zeit. Aus den zwei ersten Gleichungen lassen sich dann φ und ψ explicite als Functionen der Zeit darstellen.

Für p_1, p_2 und p_3 erhalten wir die Ausdrücke

$$(13)\quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_1} = \alpha_1, \\ p_3 &= \frac{\partial V}{\partial q_3} = \alpha_3, \\ p_2 &= \frac{\partial V}{\partial q_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}. \end{aligned}$$

Zur Ausführung der Integrationen setzt man

$$\cos\theta = x$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 a_1;\ \alpha_3 = \alpha_2 a_3$$

und erhält zur Bestimmung von x

$$(14) \qquad -\int \frac{dx}{\sqrt{1-a_1^2-a_3^2-2a_1a_3x-x^2}} = \frac{\alpha_2}{C}t+\beta_2,$$

welche Gleichung unmittelbar zeigt, dass x zwischen zwei festen Grenzen schwankt. Diese Grenzen sind mit den Wurzeln der Gleichung

$$0 = 1-a_1^2-a_3^2-2a_1a_3x-x^2$$

zusammenfallend. Die Wurzeln sind

$$-a_1a_3 \pm \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)}.$$

Um reelle Lösungen zu erhalten ist erforderlich, dass x reell und kleiner als die Einheit ist. Hieraus folgt, dass sowohl a_1 wie a_3 kleiner als die Einheit sind. Wir können also setzen

$$(15) \qquad a_1 = \cos\theta_0;\; a_3 = -\cos\varepsilon,$$

wo unter θ_0 und ε zwei reelle Winkel verstanden werden. Die Grenzen für x sind dann

$$\cos(\varepsilon-\theta_0) \text{ und}$$
$$\cos(\varepsilon+\theta_0),$$

so dass θ zwischen $\varepsilon-\theta_0$ und $\varepsilon+\theta_0$ schwankt.

Wir lassen die untere Grenze in (14) mit der Wurzel $\cos(\varepsilon+\theta_0)$ zusammenfallen, und erhalten also das Integral der Gleichung (14) in der Form

$$\cos\theta = x = \cos\theta_0\cos\varepsilon - \sin\theta_0\sin\varepsilon\cos\left(\frac{\alpha_2}{C}t+\beta_2\right).$$

Ich führe noch die Bezeichnungen

$$(16) \qquad \begin{aligned} u_1 &= -\beta_1, \\ u_2 &= -\left(\frac{\alpha_2}{C}t+\beta_2\right), \\ u_3 &= -\beta_3 \end{aligned}$$

ein, so dass

$$(17) \qquad \cos\theta = \cos\theta_0\cos\varepsilon - \sin\theta_0\sin\varepsilon\cos u_2$$

ist.

Weiter hat man

$$\frac{\alpha_2\, d\theta \sin\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_3 \cos\theta - \alpha_2^2 \cos^2\theta}} = -\,du_2,$$

so dass die Gleichungen für φ und ψ lauten

(18)
$$\varphi + u_1 = -\int \frac{a_1 + a_3 \cos\theta}{\sin^2\theta}\, du_2,$$
$$\psi + u_3 = -\int \frac{a_3 + a_1 \cos\theta}{\sin^2\theta}\, du_2$$

wo der Ausdruck (17) für $\cos\theta$ einzuführen ist.

Zur Ausführung der Integrationen beachten wir, dass

$$\frac{a_1 + a_3 \cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{a_1 + a_3}{1-\cos\theta} + \frac{1}{2}\,\frac{a_1 - a_3}{1+\cos\theta},$$
$$\frac{a_3 + a_1 \cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{a_1 + a_3}{1-\cos\theta} - \frac{1}{2}\,\frac{a_1 - a_3}{1+\cos\theta},$$

und hier ist

$$\frac{du}{1-\cos\theta} = \frac{du}{1 + a_1 a_3 + \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)}\cos u}$$
$$\frac{du}{1+\cos\theta} = \frac{du}{1 - a_1 a_3 - \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)}\cos u}.$$

Da man für a_1^2 und a_3^2 kleiner als die Einheit immer

$$\sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)} < 1 \pm a_1 a_2$$

hat, so kann man sich hier der Integralformel

$$\int \frac{du}{1 - e\cos u} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\, arc\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}u\right]$$

bedienen, wo $e < 1$ vorausgesetzt wird.

Wir bezeichnen die Grenzen, zwischen denen die Grösse $\cos\theta$ schwankt mit ϱ_1 und ϱ_2, so dass

(19)
$$\varrho_1 = -\,a_1 a_3 + \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)} = \cos(\varepsilon - \theta_0),$$
$$\varrho_2 = -\,a_1 a_3 - \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_3^2)} = \cos(\varepsilon + \theta_0).$$

Wir bekommen dann nach einiger Rechnung

$$\int \frac{du}{1-\cos\theta} = \frac{2}{|a_1+a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u\right],$$

$$\int \frac{du}{1+\cos\theta} = \frac{2}{|a_1-a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u\right].$$

Hier kommen die absoluten Beträge von $a_1 + a_3$ und $a_1 - a_3$ vor, weil der Coefficient der beiden Arctangens immer *positiv* sein muss. Man findet dies am leichtesten, wenn man u gegen $+\infty$ wachsen lässt. Dann wächst offenbar die linke Seite gegen $+\infty$ und folglich muss dies auch mit der rechten Seite der Fall sein.

Aus (18) bekommen wir nun

$$(20)\quad \begin{aligned} \varphi + u_1 &= -\frac{a_1+a_3}{|a_1+a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] - \\ &\quad -\frac{a_1-a_3}{|a_1-a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right], \\ \psi + u_3 &= -\frac{a_1+a_3}{|a_1+a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] + \\ &\quad +\frac{a_1-a_3}{|a_1-a_3|} arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right]. \end{aligned}$$

Wir bekommen also verschiedene Formeln jenachdem $\varepsilon > \theta_0$ oder $\varepsilon < \theta_0$ ist. Für die Erde wie für den Mond hat man, wie wir später finden werden, $\varepsilon > \theta_0$, so dass dann $a_1 + a_3$ und $a_1 - a_3$ *positiv* sind. Dieser Fall ist also astronomisch der wichtigste, und wird uns deswegen hauptsächlich beschäftigen. Ich gebe indessen weiter unter die entsprechenden Formeln für den anderen Fall, und ich werde übrigens zeigen, dass man beide Fälle zu einem einzigen zusammenführen kann.

Lassen uns den Fall

$$(21)\qquad \varepsilon > \theta_0,$$

betrachten.

Dann ist nach (21)

$$(21)\quad \begin{aligned} \varphi + u_1 &= -\,arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] - arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right],\\ \psi + u_3 &= -\,arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] + arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right]. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}},\quad \nu_2 = \sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}$$

so können wir diese Relationen auch in der Form

$$(22)\quad \begin{cases} tg\,(\varphi + u_1) = -\dfrac{\nu_2 + \nu_1}{1 - \nu_1\,\nu_2\,tg^2\,\frac{1}{2}u_2}\,tg\,\frac{1}{2}u_2, \\[2ex] tg\,(\psi + u_3) = -\dfrac{\nu_2 - \nu_1}{1 + \nu_1\,\nu_2\,tg^2\,\frac{1}{2}u_2}\,tg\,\frac{1}{2}u_2 \end{cases}$$

schreiben.

Für die Entwicklung der Störungsfunction im Rotationsproblem brauchen wir verschiedene Relationen, die wir am leichtesten geometrisch erhalten können. Indessen werde ich zuerst aus den Formeln (22) einige Reihenentwicklungen ableiten, die uns im Folgenden vom Nutzen sind.

Führt man für die trigonometrischen Functionen Exponentialfunctionen ein, kann man die Relationen (22) in folgender Form schreiben

$$(22^*)\quad \begin{aligned} e^{2i(\varphi+u_1)} &= e^{-2iu_2}\,\frac{(1+\varkappa_1 e^{iu_2})(1+\varkappa_2 e^{iu_2})}{(1+\varkappa_1 e^{-iu_2})(1+\varkappa_2 e^{-iu_2})},\\ e^{2i(\psi+u_3)} &= \frac{(1+\varkappa_1 e^{-iu_2})(1+\varkappa_2 e^{iu_2})}{(1+\varkappa_1 e^{iu_2})(1+\varkappa_2 e^{-iu_2})}, \end{aligned}$$

wo

$$\varkappa_1 = \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1};\quad \varkappa_2 = \frac{1-\nu_2}{1+\nu_2}.$$

Wäre

$$\varepsilon < \theta_0$$

hätte man

$$\varphi + u_1 = arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] - arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right],$$

$$\psi + u_3 = arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1-\varrho_1}{1-\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right] + arc\,tg\left[\sqrt{\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho_2}}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\right].$$

Folglich ist dann

$$\text{(23)}\quad \begin{aligned} tg\,(\varphi + u_1) &= \frac{\nu_2 - \nu_1}{1 + \nu_1\nu_2\,tg^2\frac{1}{2}u_2}\,tg\,\frac{1}{2}u_2\,. \\ tg\,(\psi + u_3) &= \frac{\nu_2 + \nu_1}{1 - \nu_1\nu_2\,tg^2\frac{1}{2}u_2}\,tg\,\frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\text{(24)}\quad \begin{aligned} e^{2i(\varphi+u_1)} &= \frac{(1+\varkappa_1' e^{iu_2})(1+\varkappa_2' e^{-iu_2})}{(1+\varkappa_1' e^{-iu_2})(1+\varkappa_2' e^{iu_2})}, \\ e^{2i(\psi+u_3)} &= e^{2iu_2}\frac{(1+\varkappa_1' e^{-iu_2})(1+\varkappa_2' e^{-iu_2})}{(1+\varkappa_1' e^{iu_2})(1+\varkappa_2' e^{iu_2})}. \end{aligned}$$

Die Grössen $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ sind nicht mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ identisch. Man hat in der That zu berücksichtigen dass ν_1 und ν_2 als *positive* Grössen betrachtet sind. Nun ist aber

für $\varepsilon > \theta_0$

$$\nu_1 = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}\,; \quad \nu_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}$$

und also

$$\varkappa_1 = -\,tg\,\frac{1}{2}\varepsilon\,tg\,\frac{1}{2}\theta_0; \quad \varkappa_2 = cotg\,\frac{1}{2}\varepsilon\,tg\,\frac{1}{2}\theta_0,$$

wogegen

für $\varepsilon < \theta_0$

$$\nu_1 = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta_0 - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_0 + \varepsilon)}\,; \quad \nu_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_0 - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_0 + \varepsilon)},$$

und

$$\varkappa_1' = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_0\,;\quad \varkappa_2' = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta_0\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Sowohl $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ wie $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ sind kleiner als die Einheit.

Mittelst der Formeln (22*) und (24) lassen sich die trigonometrischen Functionen von φ und ψ als Functionen von u_2 ausdrücken. Man gibt diesen Ausdrücken am Besten die Form FOURIER'scher Reihen, die nach Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von u_2 fortschreiten. Von diesen Reihen gebe ich die Ausdrücke für φ und ψ hier wieder. Man bekommt sie aus (22*) und (24) indem man die Logaritmen der beiden Seiten nimmt. Man erhält dann

für $\varepsilon > \theta_0$:

(25)
$$\begin{aligned}\varphi + u_1 &= -u_2 + \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1^s\sin su_2\\ &\qquad + \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_2^s\sin su_2\,.\\ \psi + u_3 &= \qquad - \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1^s\sin su_2\\ &\qquad + \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_2^s\sin su_2\,,\end{aligned}$$

und

für $\varepsilon < \theta_0$:

(26)
$$\begin{aligned}\varphi + u_1 &= \qquad \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1'^s\sin su_2\\ &\qquad - \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_2'^s\sin su_2\,,\\ \psi + u_3 &= u_2 - \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1'^s\sin su_2\\ &\qquad - \sum{}'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_2'^s\sin su_2\,.\end{aligned}$$

Im vorigen Falle — $\varepsilon > \theta_0$ — wächst $\varphi + u_1$ mit $-u_2$ in's Unendliche, wogegen $\psi + u_3$ um Null oscillirt. Im zweiten Falle — $\varepsilon < \theta_0$ — oscillirt $\varphi + u_1$ periodisch um den Werth Null, wogegen $\psi + u_3$ mit u_2 in's Unendliche wächst.

Diese Verhältnisse erklären sich leicht, indem man die geometrische Bedeutung der beiden Fällen vor den Augen hält. Es ist indessen offenbar eine grosse Unbequemlichkeit mit diesen beiden verschiedenen analytischen Ausdrücken zu operiren, und im Besonderen scheint es unter solchen Umständen sehr schwierig einen solchen Fall zu behandeln, wo ε und θ_0 einander sehr nahe liegen oder gar für einige Werthe der Zeit $\varepsilon > \theta_0$ und für andere $\varepsilon < \theta_0$ ist. Glücklicherweise lässt sich diese Schwierigkeit beseitigen, indem man *in beiden Fällen dieselbe Form für die Störungsfunction erhalten kann.* Das Rotationsproblem lässt sich deswegen ganz unabhängig von jeder Annahme über die relative Grösse von ε und θ_0 behandeln. Nur die expliciten Ausdrücke für die EULER'schen Winkel φ und ψ durch u_1, u_2 und u_3 wechseln, so dass man für $\varepsilon > \theta_0$ die Formeln (25) und für $\varepsilon < \theta_0$ die Formeln (26) zu benutzen hat.

Drückt man nämlich ν_1 und ν_2 durch die Winkel ε und θ_0 aus, so findet man in der That, dass in beiden Fällen folgende Ausdrücke für $\varphi + u_1$ und $\psi + u_3$ stattfinden:

$$(27)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi + u_1) &= -\frac{2 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) - \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2}, \\ \operatorname{tg}(\psi + u_3) &= \frac{2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) + \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2}. \end{aligned}$$

Hieraus ist zwar noch nicht bewiesen, dass die Störungsfunction auch in beiden Fällen dieselbe Form bekommt, wir werden aber finden, dass dies der Fall ist. Es wird sich ausserdem herausstellen, *dass man die Störungsfunction in endlicher Form* — also ohne Anwendung unendlicher Reihen — *durch die Grössen u_1, u_2, u_3, α_1, α_2, α_3 ausdrücken kann.*

Geometrisch lässt sich die Rotationsverhältnisse in folgender Weise voranschaulichen. Wir führen eine Hülfachse OZ_0 ein, die ich mit dem Namen *Centralachse der Rotation* bezeichnen will. Ich werde unten näher angeben, warum dieser Name gewählt werden ist. Sie wird so gelegt, dass

Fig. 1.

sie mit den Achsen OZ und Oz die Winkel ε und θ_0 bildet. Im sphærischen Dreieck $Zz Z_0$ hat man nun

$$\begin{aligned} Zz &= \theta, \\ z Z_0 &= \theta_0, \\ Z_0 Z &= \varepsilon, \\ \angle Z_0 Z z &= 90° - \psi - \overline{XN}, \\ \angle Z z Z_0 &= 90° + \varphi + \overline{xM}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} u_1 &= \overline{xM} + 90°, \\ u_2 &= \angle z Z_0 Z - 180°, \qquad (28) \\ u_3 &= XN - 90°, \end{aligned}$$

so dass die Winkel im sphærischen Dreieck die Werthe

$$\begin{aligned} \angle Z_0 Z z &= -(\psi + u_3), \\ \angle Z z Z_0 &= \varphi + u_1, \\ \angle z Z_0 Z &= 180° + u_2 \end{aligned}$$

bekommen.

Es zeigt sich nun, dass aus dem sphærischen Dreieck dieselben Relationen zwischen der Grössen θ, φ, ψ und der

Grössen θ_0, ε, u_1, u_2 und u_3 folgen, die wir in (17) und (27) abgeleitet haben. Da u_1 und u_3 ebensowohl wie θ_0 und ε im jetzt behandelten Rotationsfall unverändlich waren, so folgt hieraus im Folge (28), dass $\overline{xM}$ und $\overline{XN}$ unveränderlich sind. Dies bedeutet, dass die *Centralachse in diesem Falle eine unveränderliche Lage im Körper und im Raum einnimmt.* Da weiter nach (16) u_2 proportionel de Zeit wächst, so finden wir, dass die Figurachse Oz einen circularen Kegel um die im Raum festliegende Centralachse beschreibt.

Die *Rotationsgeschwindigkeit* hat nach (16) den Ausdruck

$$-\frac{\alpha_2}{C}$$

und die *Rotationsdauer* beträgt

$$\frac{2\pi C}{\alpha_2}.$$

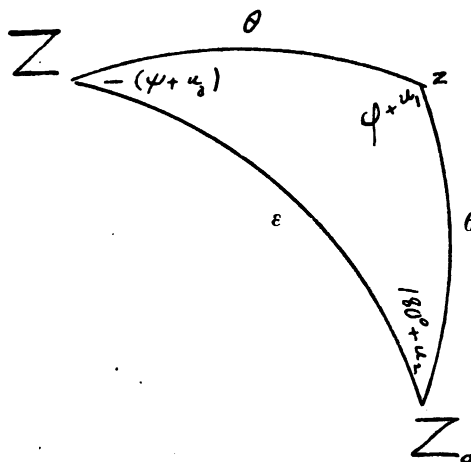


Fig. 2.

Die *Rotationsachse* fällt hier mit der Centralachse zusammen. Dies ist aber nicht im gestörten Rotationsproblem der Fall, auch nicht wenn man, ohne die äusseren Kräfte zu berücksichtigen, die Unterschiede der Trägheitmomente A, B und C in Betracht zieht. Die Centralachse fällt dann mit der Achse der s. g. unveränderlichen Ebene zusammen. Es empfielt sich doch den Namen Centralachse zu behalten, theils weil die andere Benennung ziemlich umständlich ist, theils auch weil die »unveränderliche Ebene» nicht eine unveränderliche Lage hat, wenn die äusseren Kräfte in Betracht gezogen werden.

Aus dem sphærischen Dreieck ZzZ_0 folgen einige Relationen die wir für die Ableitung der Ausdrücke für die Störungsfunction brauchen, und die wir daher hier zusammenstellen. Man hat

$$(29)\quad \begin{cases} \sin\theta\sin(\varphi+u_1) = -\sin\varepsilon\sin u_2, \\ \sin\theta\cos(\varphi+u_1) = \cos\varepsilon\sin\theta_0 + \sin\varepsilon\cos\theta_0\cos u_2, \\ \cos\theta = \cos\varepsilon\cos\theta_0 - \sin\varepsilon\sin\theta_0\cos u_2, \end{cases}$$

und

$$(29^*)\quad \begin{matrix} \sin\theta\sin(\psi+u_3) = \sin\theta_0\sin u_2 \\ \sin\theta\cos(\psi+u_3) = \cos\theta_0\sin\varepsilon + \sin\theta_0\cos\varepsilon\cos u_2 \end{matrix}$$

Weiter hat man

$$\text{(a)}\ \sin u_2\sin\varepsilon = -\sin(\varphi+u_1)\sin\theta,$$
$$\text{(b)}\ \sin u_2\cos\varepsilon = \cos(\varphi+u_1)\sin(\psi+u_3)-\sin(\varphi+u_1)\cos(\psi+u_3)\cos\theta,$$
$$\text{(c)}\ \cos u_2 = \cos(\varphi+u_1)\cos(\psi+u_3)+\sin(\varphi+u_1)\sin(\psi+u_3)\cos\theta,$$
$$\text{(d)}\ \sin u_2\sin\theta_0 = \sin(\psi+u_3)\sin\theta,$$
$$\text{(e)}\ \sin u_2\cos\theta_0 = -\sin(\varphi+u_1)\cos(\psi+u_3)+\cos(\varphi+u_1)\sin(\psi+u_3)\cos\theta,$$
$$\text{(f)}\ -\sin\varepsilon\sin\theta_0 + \cos\varepsilon\cos\theta_0\cos u_2 =$$
$$= \sin(\varphi+u_1)\sin(\psi+u_3) + \cos(\varphi+u_1)\cos(\psi+u_3)\cos\theta.$$

Die letzte Formel, die im folgenden von Nutzen ist, scheint nicht sehr bekannt zu sein. Ich fand sie in einem Beispiel zu TODHUNTER's sphærischen Trigonometrie (2[te] Auflage s. 43) und lautet mit der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der sphærischen Trigonometrie

$$\sin a\sin b + \cos a\cos b\cos C = \sin A\sin B - \cos A\cos B\cos c.$$

Sie kann mit Hülfe der Polardreiecke bewiesen werden und ist, beiläufig bemerkt, als Controllformel sehr brauchbar, da sie alle sechs Elemente des sphærischen Dreiecks enthält.

Werden die zwei ersten Gleichungen (29) und die beiden Gleichungen (29*) mit einander dividirt, erhält man die Formeln (27).

Nach dem der Fall der Rotation eines Kugelförmigen Körpers somit, mit der Ausführlichkeit, die durch die grundlegende Bedeutung dieser Betrachtungen für das folgende bedingt war, auseinandergesetzt worden ist, gehen wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen, welche für die Behandlung des allgemeinen Rotationsproblems benutzt werden sollen, über.

Setzt man

$$(30) \quad S = \alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_3 + \int \frac{dq_2}{\sin q_2} \sqrt{\alpha_2^2 \sin^2 q_2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos q_2}$$

so ist nach (8), (9) und (16)

$$(31) \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -u_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Statt der Grössen q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, die nach (1) die Bewegung im allgemeinen Rotationsproblem bestimmen, können wir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, u_1, u_2, u_3 als neue Veränderlichen einführen und im Folge der Gleichungen (31) hat man nun nach dem JACOBI'schen Transformationstheorem zur Bestimmung der Bewegung die Gleichungen

$$(32) \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}; \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i},$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

welche ich der Untersuchung der Rotation der Planeten und des Mondes zu Grunde gelegt habe.

Was die mechanische Bedeutung der neuen Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, u_1, u_2, u_3 betrifft, erinnere ich daran, dass man hat:

$\alpha_2 = - C \times$ Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Centralachse;

$\alpha_1 = \alpha_2 \cos \theta_0$,

$\alpha_3 = - \alpha_2 \cos \varepsilon$,

wo θ_0 und ε die Winkel bezeichnen, welche die Centralachse mit der im Körper festen z Achse *bez.* der im Raum festen Z Achse bildet.

Weiter ist

$u_1 = 90° + \overline{xM}$,

wo $\overline{xM}$ die Länge der Centralachse, auf die im Körper feste xy-Ebene bezogen, bezeichnet (vergl. Fig. 1),

$u_3 = \overline{XN} - 90°$,

wo $\overline{XN}$ die Länge der Centralachse, auf die im Raume feste $\overline{XY}$-Ebene bezogen, bezeichnet,

$180° + u_2 =$ dem Winkel zwischen $Z_0 z$ und $Z_0 Z$ (vergl. Fig. 2).

Nachdem aus (32) die Werthe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, u_1, u_2, u_3 bestimmt worden sind, erhält man θ aus der Formel

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \cos\varepsilon - \sin\theta_0 \sin\varepsilon \cos u_2 .$$

Die beiden übrigen EULER'schen Winkel, welche mit θ zusammen die Lage der im Körper festen x, y, z Achsen zu den im Raume festen Achsen X, Y, Z bestimmen, erhält man aus (25) oder (26) jenachdem $\varepsilon > \theta_0$ oder $\varepsilon < \theta_0$ ist. In beiden Fällen kann man sie auch aus den Gleichungen (27) erhalten. Die Reihenentwicklungen (25) und (26) sind aber in practischer Hinsicht vorzuziehen.



Tryckt den 4 februari 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:o 12.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

PARTIKULARE INTEGRALE DES ROTATIONSPROBLEMS

VON

C. V. L. CHARLIER

MIT 1 TEXTFIGUR

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ATRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 12.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

N:o 32

Partikulare Integrale des Rotationsproblems.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mit 1 Textfigur.

Mitgeteilt am 13. November 1907.

Wird die Rotation eines festen Körpers durch einen Körper gestört, der sich in einer Ebene bewegt, so wird diese Ebene zweckmässig als XY-Ebene gewählt. Der Ausdruck für das Potential vereinfacht sich dabei, indem alle mit dem Sinus der Breite des störenden Körpers multiplizierten Glieder verschwinden. Diese Vereinfachung ist erlaubt so oft es sich um die Störungen der Sonne auf die Rotation der Planeten handelt, und ich werde deswegen dies Problem kurz als das *planetarische Rotationsproblem* bezeichnen.

Das planetarische Rotationsproblem besitzt einige partikuläre Integrale, die ich hier untersuchen will. Ich bediene mich der Veränderlichen ξ_1, η_1, u, v, p, q, die ich an anderer Stelle definiere.[1] Die Störungsfunktion ist nach Potenzen von u, v, p, q entwickelt. Wird mit $P_r(u, v, p, q)$ oder kurz P_r eine Potenzreihe in u, v, p, q bezeichnet, in welcher die Summe der Exponenten der niedrigsten Dimensionen in der Potenzreihe gleich r ist, so kann man die charakteristische

[1] »Entwickelung des Potentials im Rotationsproblem.» Ich werde im Folgenden diesen Aufsatz mit Meddel. n:o 33 bezeichnen.

Funktion H' in der Form

$$(1)\quad \begin{cases} H' = \dfrac{\xi_1^2}{2C} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu}{r^3}[k_1 A \cos^2\eta_1 + k_2 B \sin^2\eta_1] - \\ \qquad - \xi_1 \dfrac{d\lambda}{dt} + P_2(u, v, p, q) \end{cases}$$

schreiben.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind (Meddel. N:o 33)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial \eta_1}, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial u}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial q}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial p}. \end{cases}$$

Es erhellt aus diesen Gleichungen und aus der obigen Form für H', dass das planetarische Rotationsproblem die partikularen Lösungen

$$(3)\qquad u = v = p = q = 0$$

hat, wenn nämlich ξ_1 und η_1 aus den ersten Gleichungen (2) bestimmt werden. Wir setzen zur Abkürzung

$$(4)\qquad F_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} - \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}[k_1 A \cos^2\eta_1 + k_2 B \sin^2\eta_1] - \xi_1 \frac{d\lambda}{dt},$$

so dass

$$H' = F_0 + P_2(u, v, p, q)$$

ist.

Dann ist

$$(5)\qquad \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_1}.$$

Führt man die Differentiationen aus, so lauten diese Gleichungen, wenn man beachtet, dass

$$k_1 A - k_2 B = B - A$$

ist,

$$(5^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu}{r^3}(B-A)\,2\cos\eta_1\sin\eta_1\,, \\ \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\xi_1}{C} + \dfrac{d\lambda}{dt}\,. \end{cases}$$

Die Länge λ und der Radius Vector r des störenden Planeten sind gewisse Funktionen der Zeit, die wir im allgemeinen als bekannt voraussetzen können. Wir fangen mit dem einfachsten Fall an, dass nämlich der störende Körper sich in einem Kreis um den rotierenden Körper bewegt. Bezeichnen wir die mittlere Bewegung des störenden Körpers mit n, so hat man dann

$$(6)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = n\,; \quad \frac{\mu}{r^3} = n^2\frac{\mu}{\mu+\mu_1}\,,$$

wo μ_1 die Masse des rotierenden Körpers bezeichnet. Wir setzen

$$(7)\qquad \nu^2 = 3\,\frac{\mu}{r^3}\,\frac{B-A}{C}\,.$$

Die Grösse ν ist also eine Konstante, wenn der störende Körper sich in einem Kreis bewegt. Die Gleichungen (5*) lauten dann

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = C\,\nu^2\cos\eta_1\sin\eta_1\,, \\ \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\xi_1}{C} + n\,. \end{cases}$$

Hier findet man unmittelbar die beiden partikularen Lösungen

$$\eta_1 = 0, \qquad \xi_1 = Cn,$$
$$\text{und} \quad \eta_1 = \pm 90^\circ, \quad \xi_1 = Cn.$$

Bewegt sich der störende Körper in einem Kreis, hat also das planetarische Rotationsproblem die partikularen Integrale $u = v = p = q = 0$, $\xi_1 = Cn$ *und* $\eta_1 = 0$ *oder* $\eta_1 = \pm 90^\circ$.

Die mechanische Bedeutung dieser Lösungen sind leicht zu finden. Da $u = v = p = q = 0$ ist, so ist θ_0 und ε auch

gleich Null, so dass *die Rotationsachse mit der Achse des Trägheitsmomentes C zusammenfällt.*

Was η_1 betrifft, so hat man nach der Definition (Meddel. 33)

$$\eta = u_1 + u_2 - u_3 + \lambda.$$

Wenn die drei Achsen Z, z und Z_0 zusammenfallen, so ist (Meddel. 31, Fig. 1)

$$u_2 = 180°, \quad u_1 - u_3 = 180° + xX,$$

so dass

$$\eta_1 = \lambda - Xx$$

Die Grösse η_1 bezeichnet also hier den Unterschied zwischen der Länge der Planeten und der Länge der Trägheitsachse x in der XY-Ebene. (Die Trägheitsachse x entspricht dem Trägheitsmoment A).

Die beiden Lösungen $\eta_1 = 0$ und $\eta_1 = 90°$ bedeuten also mechanisch, dass die kleinste bezw. die mittlere Trägheitsachse gegen den störenden Körper gerichtet sind. Man hat es mit sog. *gebundener* Rotation zu tun.

Diese partikularen Integrale sind indessen nur Spezialfälle der allgemeinen Lösungen der Gleichungen (8), die leicht zu finden sind. Wird nämlich die zweite Gleichung (8) differentiiert, so erhält man für η_1 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1 .$$

Diese gibt

$$\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2 = E - \nu^2 \sin^2\eta_1 ,$$

wo E eine Integrationskonstante bezeichnet.

Das Integral dieser Gleichung ist verschieden je nachdem der Wert von E grösser oder kleiner als ν^2 ist. Ist

$$1) \qquad E > \nu^2$$

so ist die Lösung

$$(9) \qquad \eta_1 = am\,(\sqrt{E}\,t + \gamma), \text{ Mod. } \frac{\nu}{\sqrt{E}} .$$

Ist dagegen

$$2)\qquad E < \nu^2,$$

so erhält man eine reelle Lösung von der Form

$$(10)\qquad \sin \eta_1 = \frac{\sqrt{E}}{\nu}\, sn\,(\nu t + \gamma)\,;\ \text{Mod.}\ \frac{\sqrt{E}}{\nu}\,.$$

Im letzteren Falle haben wir also *Libration* in η_1 um den Wert Null. Der Maximalwert von η_1 ist durch die Relation

$$\sin \eta_1 = \frac{\sqrt{E}}{\nu}$$

gegeben. Die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes schwankt periodisch um den Radius Vector des störenden Körpers ganz in derselben Weise — und nach ähnlichen Gesetzen — wie das einfache Pendel um die Lotlinie. Beispiele in der Natur dieser Art sind die Libration des Mondes und, nach SCHIAPARELLI, die Rotation des Mercurs und der Venus.

Ist $E = \nu^2$ so findet *Limitation* statt. Man hat in der Tat dann, wie aus (9) oder (10) hervorgeht,

$$\sin \eta_1 = \frac{e^{\nu t + \gamma} - e^{-\nu t - \gamma}}{e^{\nu t + \gamma} + e^{-\nu t - \gamma}}\,.$$

Geht t gegen $+\infty$, geht $\sin \eta_1$ gegen die Einheit, und also η_1 gegen 90°. Die mittlere Trägheitsachse nähert sich asymptotisch dem Radius Vector des störenden Körpers. Dies entspricht der partikularen Lösung $\eta_1 = 90°$.

Es erhellt aus den obigen Ausdrücken unmittelbar, dass die Libration um $\eta_1 = 0$ *stabil*, um $\eta_1 = 90°$ dagegen *unstabil* ist.

Ist $E > \nu^2$ so wächst η_1 mit der Zeit ins Unendliche.

Wird η_1 in eine FOURIER'sche Reihe entwickelt, so erhält man für

$$1)\qquad E > \nu^2$$

$$\eta_1 = \frac{\pi(\sqrt{E}t + \gamma)}{2R} + 2\sum{}' \frac{1}{s}\frac{q^s}{1+q^{2s}} \sin \frac{3\pi(\sqrt{E}t + \gamma)}{R}\,.$$

Ist dagegen

$$2) \qquad E < \nu^2$$

so erhält man

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \sqrt{E}\, cn\,(\nu t + \gamma)$$

und hinaus

$$\eta_1 = \frac{4}{k} \sum \frac{1}{2s-1} \frac{\sqrt{q^{2s-1}}}{1+q^{2s-1}} \sin \frac{(2s-1)\pi(\nu t + \gamma)}{2R} .$$

Ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Lösungen verdient besonders hervorgehoben zu werden. Er betrifft die Grösse der Periode der Schwankungen. Ist nämlich

$$1) \qquad E > \nu^2$$

so erhält die *Schwankungsperiode* den Wert

$$\frac{2K}{\sqrt{E}}$$

und für

$$2) \qquad E < \nu^2$$

den Wert

$$\frac{4K}{\nu} .$$

Für sehr hohe Werte der Integrationskonstante E hat mithin die Schwankungsperiode genähert den Wert

$$\frac{\pi}{\sqrt{E}}$$

und *für sehr kleine Werte* dieser Integrationskonstante hat sie genähert den Wert

$$\frac{2\pi}{\nu} .$$

Im vorigen Falle nähert sich die Schwankungsperiode dem Werte Null, im letzteren Falle dem Werte $2\pi : \nu$, der vom Unterschied der Trägheitsmomente B und A abhängig

ist. Diesen Grenzwert der Schwankungsperiode können wir in der Form

$$2T:\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$$

schreiben, wenn $2T$ die Umlaufszeit des störenden Körpers bezeichnet.

Der Minimalwert von $(B-A):C$ ist Null (Rotationskörper um die grösste Trägheitsachse rotierend), der Maximalwert ist Eins (fadenförmiger Körper). *Die Schwankungsperiode ist also grösser als*

$$\frac{2T}{\sqrt{3}} = 0.577 \times 2T.$$

Nachdem η_1 gefunden worden ist, erhält man ξ_1 aus einer der Gleichungen (8). Aus

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1$$

erhält man für

$$1) \qquad E > \nu^2$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu^2 cn(\sqrt{E}t+\gamma)\, sn(\sqrt{E}t+\gamma)$$

also

$$\xi_1 = -C\sqrt{E}\, dn(\sqrt{E}t+\gamma) + \text{Konstante},$$

wo die Konstante nach der zweiten Gleichung (8) den Wert Cn hat. Ist

$$2) \qquad E < \nu^2$$

so erhält man

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu\sqrt{E}\, dn(\nu t+\gamma)\, sn(\nu t+\gamma)$$

und

$$\xi_1 = -C\sqrt{E}\, cn(\nu t+\gamma) + \text{Konstante},$$

wo die Konstante wieder den Wert Cn hat.

Wir haben bis jetzt angenommen, dass der störende Körper sich um den rotierenden Körper in einem Kreis bewegt. Ist dies nicht der Fall, so kompliziert sich die Aufgabe. Die Differentialgleichung für η_1 hat dann die Form

$$(11)\qquad \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1 = \frac{d^2\lambda}{dt^2},$$

und hier sind sowohl ν^2 wie λ Funktionen der Zeit.

Indem ich in der ersten Linie den Librationsfall vor Augen habe, so ist ersichtlich, dass die Veränderungen von ν^2, welche von Veränderungen im Radius Vector herrühren, von geringerem Einfluss sind, als die Veränderungen in λ. Die Veränderungen in ν^2 sind nämlich mit der als klein angenommenen Grösse $\sin\eta_1$ multipliziert. Wird für λ die Form

$$\lambda = nt + c_0 + \Sigma A \cos(bt + c)$$

angenommen, so kann man in vielen Fällen die Differentialgleichung (11) auf die lineare Form

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2\eta_1 = -\Sigma b^2 A \cos(bt + c)$$

bringen, und das Integral lautet dann

$$(12)\qquad \eta_1 = A_0 \cos(\nu t + B_0) + \sum \frac{b^2 A}{b^2 - \nu^2} \cos(bt + c),$$

wo A_0 und B_0 die Integrationskonstanten bezeichnen.

Diese Formel gibt eine gute Annäherung zum gesuchten Integral so oft keine von den Grössen b genähert gleich ν sind. In letzterem Fall entstehen aber Schwierigkeiten, die man bis jetzt nicht genügend untersucht hat. Die Untersuchungen, die mir bekannt sind, geben wenigstens keinen Aufschluss über das Verhalten des Integrales für solche Werte des Parameters ν^2, die in der Nähe des Wertes $\nu^2 = b^2$ liegen.

Ich nehme an, dass es sich um die Differentialgleichung

$$(13)\qquad \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1 = -b^2 A \cos bt$$

handelt, so dass nur ein Glied in λ mitgenommen wird.

Zu dieser Gleichung existiert immer ein partikulares Integral mit der Periode $2\pi:b$. Ich will dies Integral näher in Betracht ziehen. Ich setze also

$$(13^*) \qquad \eta_1 = \alpha_1 \cos bt + \alpha_3 \cos 3bt + \alpha_5 \cos 5bt + \cdots$$

und suche die Koeffizienten α_1, α_3, α_5 u. s. w. durch Rekursionsformeln zu bestimmen. Man hat

$$\cos\eta \sin\eta_1 = \frac{1}{2}\sin 2\eta_1 = \eta_1 - \frac{2}{3}\eta_1^3 + \frac{2}{15}\eta_1^5 - \cdots$$

und

$$\begin{aligned} \eta_1^3 = {} & \frac{1}{4}\alpha_1^3 (3\cos bt + \cos 3bt) \\ & + \frac{3}{4}\alpha_1^2 \alpha_3 (\cos bt + 2\cos 3bt + \cos 5bt) \\ & + \frac{3}{4}\alpha_1 \alpha_3^2 (2\cos bt + \cos 5bt + \cos 7bt) \\ & + \frac{1}{4}\alpha_3^3 (3\cos 3bt + \cos 9bt) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Hieraus entstehen die folgenden Rekursionsformeln:

$$-b^2 A = -b^2\alpha_1 + \nu^2\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^3 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3^2 + \cdots\right)$$

$$0 = -9b^2\alpha_3 + \nu^2\left(\alpha_3 - \frac{1}{6}\alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_3^3 + \cdots\right)$$

$$\cdots\cdots$$

Es ist wohl kaum zu erwarten, dass man eine strenge Auflösung dieser Gleichungen finden könnte. Um eine Vorstellung von der möglichen Form des Integrales zu erhalten, bemerke ich, dass nach der zweiten Gleichung α_3, für $\nu^2 = b^2$, den genäherten Wert

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1^3}{48\,\nu^2}$$

hat, woraus man findet, dass α_3 sehr klein ist, wenn α_1 einen kleinen Wert hat. Setzt man dementsprechend in der ersten

Gleichung $\alpha_3 = 0$, so erhält man für α_1 die Gleichung

$$\left(\frac{b^2}{\nu^2} - 1\right)\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^3 = \frac{b^2}{\nu^2}A. \tag{14}$$

Wäre $\nu^2 = b^2$, so würde man hieraus

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2A}$$

erhalten.

Dies ist aber nicht der grösste Wert von α_1, der auftreten kann. Diesen trifft man vielmehr, wenn die Gleichung (14) eine Doppelwurzel besitzt. Schreibt man

$$z = \frac{b^2}{\nu^2},$$

so ist

$$\alpha_1^3 - 2(1 - z)\alpha_1 - 2zA = 0 \tag{15}$$

und diese Gleichung hat eine Doppelwurzel

$$\alpha_1 = -\sqrt[3]{zA},$$

wenn z die Gleichung

$$z^2 A^2 = \frac{8}{27}(1 - z)^3 \tag{16}$$

befriedigt.

Lässt man z von Null bis ∞ variieren, so findet man, dass diese Gleichung eine einzige positive Wurzel besitzt. Diese Wurzel ist zwischen $z = 0$ und $z = +1$ gelegen. Setzt man nämlich

$$f(z) = \frac{8}{27}(z - 1)^3 + z^2 A^2,$$

so findet man, dass $f(0)$ *negativ*, $f(1)$ positiv und $f'(z)$ zwischen $z = 0$ und $z = +\infty$ positiv ist. Es gibt also eine einzige positive Wurzel. Diese Wurzel — die wir mit z_0 bezeichnen — lässt sich nach Potenzen von $A^{2/3}$ entwickeln und zwar bekommt man

$$z_0 = 1 - \frac{3}{2}A^{2/3} + A^{4/3} - \cdots$$

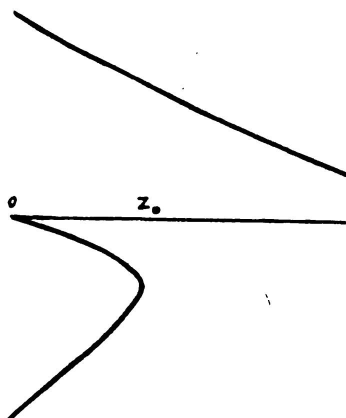
Ist A klein, so ist z_0 nahe gleich der Einheit. Der entsprechende Wert von α_1 ist

$$\alpha_1 = -\sqrt[3]{z_0 A},$$

welche Wurzel doppelt ist. Ausserdem besitzt (15) die einfache Wurzel

$$\alpha_1 = +2\sqrt[3]{z_0 A}.$$

Ist $z > z_0$ hat (15) eine einzige, und zwar positive, Wurzel, die sich für wachsende z dem Werte $\alpha_1 = A$ nähert. Ist $z < z_0$ so hat (15) 3 reelle Wurzeln, von denen eine positiv, die beiden anderen negativ sind. Für $z = 0$ hat man die Wurzeln $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = \pm\sqrt{2}$.



Die periodische Lösung (13*) hat also die merkwürdige Eigenschaft eine diskontinuierliche Funktion des Parameters z zu sein. Fangen wir nämlich mit dem Werte $z = 0$ an, so hat (13) die Lösung $\eta_1 = 0$. Wenn z wächst, so wachsen die Koeffizienten (wenigstens gilt dies von dem ersten Glied in der Reihe (13*)) in der periodischen Lösung, bis wir für $z = z_0$ die Lösung

$$\eta_1 = -\sqrt[3]{z_0 A}\cos bt + \alpha_3 \cos 3bt + \cdots$$

erhalten. Wenn nun $z > z_0$ wird, so haben wir es mit der periodischen Lösung

$$\eta_1 = 2\sqrt[3]{z_0 A}\cos bt + \alpha_3 \cos 3bt + \cdots$$

zu tun, d. h. die Amplitude wird verdoppelt und wechselt das Zeichen.

Die hier behandelten Lösungen haben ihre Anwendung bei dem Studium der Bewegung eines einfachen Pendels, das Störungen unterworfen ist, welche nahe dieselbe Periode besitzen wie die freien Schwingungen des Pendels. Die hier

angewandte Methode ist zwar in mathematischer Hinsicht sehr mangelhaft, dürfte aber eine genäherte Aufgabe der Lösung geben.

Es ist für die Theorie der Libration des Mondes von Interesse, die numerischen Beträge der hier behandelten Störungen zu untersuchen. Das Glied in der Mondlänge, das hier in Betracht kommt, ist die sog. jährliche Gleichung, welche nach DELAUNAY die Form

$$-668''.9 \sin \odot$$

hat. Man hat also $A = -668''.9$, oder im Radius ausgedrückt $A = -0.00324$. Wenn die Trägheitsmomente des Mondes solche Werte haben würden, dass die Periode der physischen Libration genau ein Jahr betragen würde, so würde man in η_1 ein Glied erhalten vom Betrage

$$-11^\circ.99 \sin \odot.$$

Im singulären Punkt z_0 springt der Koeffizient dieses Gliedes von $+8^\circ.48$ zu $-16^\circ.96$ über.

Da die Beobachtungen, die man zu verschiedenen Zeiten angestellt hat, um den Wert des Gliedes im Ausdrucke für die Libration des Mondes, das die Periode eines Jahres hat, zu bestimmen, insofern übereinstimmen, dass der Koeffizient dieses Gliedes höchstens einige Bogenminuten betragen kann, so *scheint es also ausgeschlossen zu sein, dass die Periode der physischen Libration die Länge von einem Jahr haben könnte.*

Wir haben bis jetzt nur die partikulare periodische Lösung der Gleichung (13) betrachtet. Um die allgemeine Lösung zu erhalten, müssen wir noch die entsprechenden Variationsgleichungen in Betracht ziehen. Setzt man

$$\eta = \eta_1^0 + \varDelta\eta$$

und verstehen unter η_1^0 die partikulare Lösung von (13), die eine Periode gleich $2\pi : b$ hat, so erhält die Gleichung für $\varDelta\eta$ die Form

$$\frac{d^2\varDelta\eta}{dt^2} + \nu^2 \cos 2\eta_1^0 \varDelta\eta = 0.$$

Diese gehört zu den linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, und das Integral ist von der Form

(17) $$\Delta\eta = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mu_s \cos\,[w + 2s\,b\,t],$$

wo

$$w = \nu\,(1 - \sigma)\,t + \pi$$

ist und die Grösse σ genähert den Wert

$$\sigma = \frac{\nu^2 A^4}{b^2 \left(\frac{\nu^2}{b^2} - 1\right)^5}$$

hat (man vergleiche meine Vorlesungen über die »Mechanik des Himmels» S. 41). Wenn ν^2 nahe gleich b^2 ist, so ist dieser Ausdruck nicht mehr gültig.

Fügt man zu (17) das partikulare Integral (13*) hinzu, so hat man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (13).

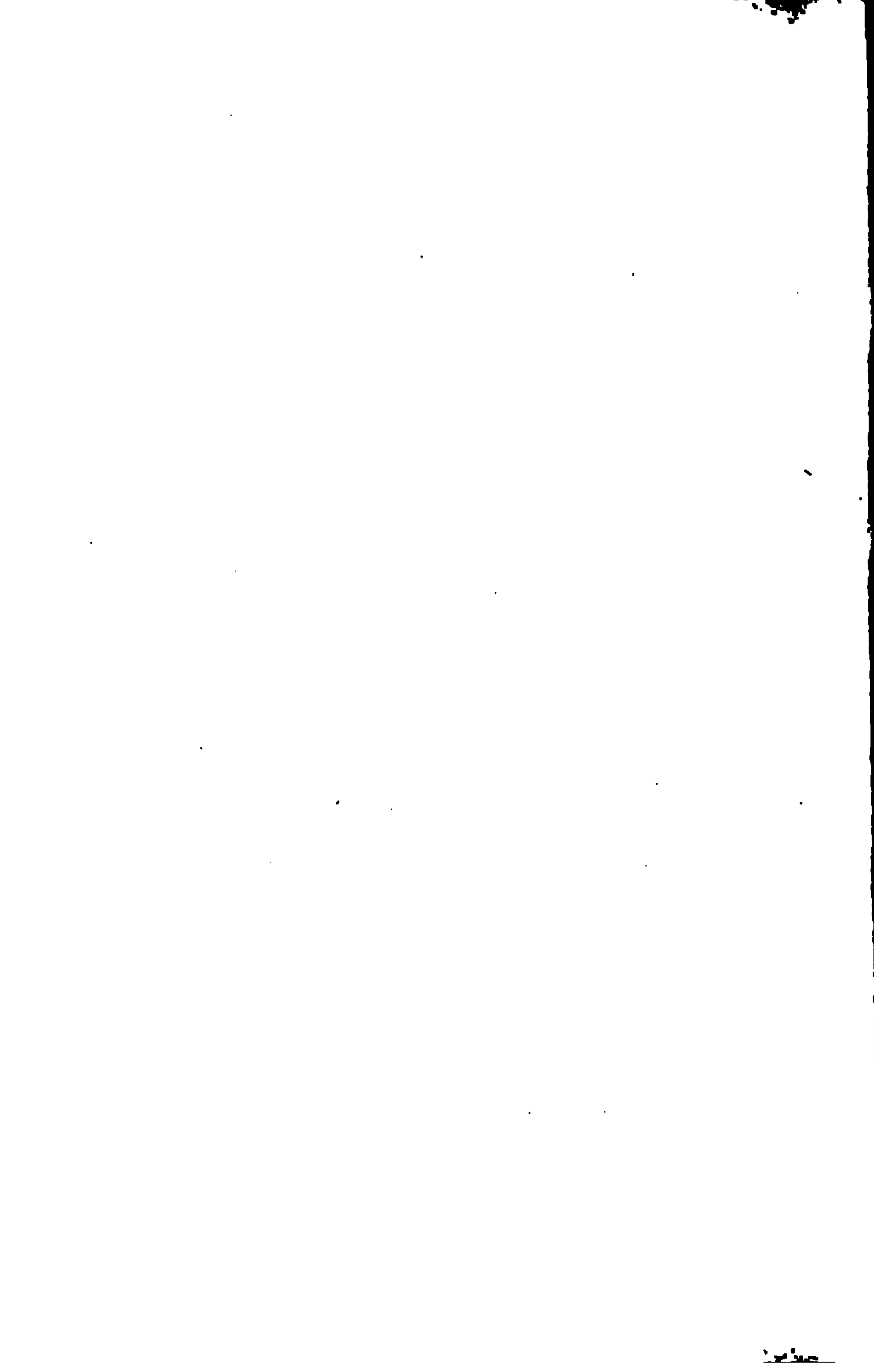
Die partikularen Integrale, die wir hier betrachtet haben, werden zweckmässig als Ausgangslösungen benutzt, wenn man die Rotation des Mondes untersuchen will. Ich habe bei der Untersuchung dieses Problems diesen Weg eingeschlagen und dadurch eine grosse Einfachheit und Übersichtlichkeit in der Behandlung des Problems erreicht.

Ist der rotierende Körper ein Rotationskörper, so dass $A = B$ ist, so besitzt das planetarische Rotationsproblem — vorausgesetzt, dass der störende Körper sich in einem Kreise bewegt — ausser dem Integrale $H' =$ Constans noch ein Integral (nämlich $\alpha_1 =$ Constans). Die Differentialgleichungen können dann auf zwei Freiheitsgrade reduziert werden. Dies findet seine Anwendung in der Theorie der Rotation der Erde. Das Integral $\alpha_1 =$ Constans erlaubt wichtige Schlüsse über die Stabilität der Rotation der Erde zu ziehen.



Tryckt den 28 januari 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.



ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 6. N:o 17.

ENTWICKELUNG DES POTENTIALS IM ROTATIONSPROBLEM

VON

C. V. L. CHARLIER UND E. ZINNER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1910

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 6. N:o 17.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 33

Entwickelung des Potentials im Rotationsproblem.

Von

C. V. L. CHARLIER und E. ZINNER.

Inlämnad den 13 april 1910.

[1]. Das Rotationsproblem für einen festen Körper ist in »Meddelanden» N:o 31 auf die kanonischen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}$$

zurückgeführt worden, wo α_1, α_2 und α_3 gewisse *lineare* Grössen, u_1, u_2 und u_3 gewisse *Winkel* bezeichnen, welche die Lage der »Zentralachse» im Raum und im Körper bestimmen. Nachdem aus (1) die Grössen α_i und u_i bestimmt worden sind, erhält man die EULER'schen Winkel φ, ψ und θ aus den Formeln

$$\operatorname{tg}(\varphi + u_1) = -\frac{2 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) - \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2},$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}(\psi + u_3) = \frac{2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) + \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2},$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varepsilon - \sin \theta_0 \sin \varepsilon \cos u_2,$$

wo zwischen den Winkeln θ_0 und ε und den Grössen α_1, α_2 und α_3 die folgende Relationen bestehen:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_0 &= \alpha_1 : \alpha_2\,, \\
\cos\varepsilon &= -\alpha_3 : \alpha_2\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Statt der geschlossenen Formeln (2) kann man sich in der Praxis der Reihenentwickelungen bedienen, die in »Meddelanden» N:o 31 abgeleitet worden sind. Da der Winkel θ_0 zwischen der Figurachse (der C-Achse) und der Zentralachse für alle im Planetensysteme bekannten Fälle sehr klein ist, so folgen aus (2), unter Vernachlässigung von θ_0, die genäherten Formeln

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -u_1 - u_2\,, \\
\psi &= -u_3\,, \\
\theta &= \varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Wird die *erste* Potenz von θ_0 berücksichtigt, erhält man

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -u_1 - u_2 + \frac{\theta_0 \sin u_2}{\operatorname{tg}\varepsilon}\,, \\
\psi &= -u_3 + \frac{\theta_0 \sin u_2}{\sin\varepsilon}\,, \\
\theta &= \varepsilon + \theta_0 \cos u_2\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

oder, wenn die Grössen α_1, α_2, α_3 eingeführt werden,

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -u_1 - u_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}\sin u_2\,, \\
\psi &= -u_3 + \sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}\sin u_2\,, \\
\theta &= \varepsilon + \sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2\,.
\end{aligned}
\tag{5*}
$$

Die Formeln (5), oder (5*), sind völlig genügend für alle im Planetensystem bekannten Fälle. Für sonst in der Mechanik vorkommenden Fälle, wo θ_0 nicht klein ist, müssen die genauen Formeln (2) benutzt werden.

[2]. Bevor zur Integration der Gleichungen (1) geschritten werden kann, muss die charakteristische Funktion H durch die veränderlichen α_i und u_i ausgedrückt werden. Man hat hier H gleich der Differenz zwischen der lebendigen Kraft T und dem Potential U. In M[1] ist T durch die EULER'schen Winkel ausgedrückt. Man hat

$$T = T_0 + k_1 T_1 + k_2 T_2,$$

wo die Werte von T_0, T_1 etc. in M ausgeschrieben worden sind.

Aus M (13) erhält man

$$p_2^2 \sin^2\theta = \alpha_2^2 \sin^2\theta - p_1^2 - p_3^2 - 2 p_1 p_3 \cos\theta.$$

Wird dieser Ausdruck in die erste Formel M (4) eingesetzt, erhält man somit

$$T_0 = \frac{\alpha_2^2}{2C}. \tag{6}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} p_1 \cos\theta + p_3 &= \alpha_1 \cos\theta + \alpha_3 \\ &= \alpha_2 [\cos\theta_0 \cos\theta - \cos\varepsilon] \\ &= -\alpha_2 \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi + u_1), \end{aligned}$$

wie man aus Fig. 2 in M direkt ableitet.

Da nach M (12), (13) und (16)

$$\begin{aligned} p_2 \sin\theta &= \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos\theta - \alpha_2^2 \cos\theta} \\ &= \alpha_2 \frac{d\cos\theta}{du_2} = \alpha_2 \sin\theta_0 \sin\varepsilon \sin u_2 \end{aligned}$$

oder nach M (29)

$$p_2 = -\alpha_2 \sin\theta_0 \sin(\varphi + u_1),$$

so erhält man für T_1 und T_2 die Ausdrücke

---

[1] Ich bezeichne hier und im Folgenden den Aufsatz: »Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems» Meddel. N:o 31 mit M.

$$(7) \qquad T_1 = \frac{\alpha_2^2}{2C} \sin^2 \theta_0 \sin^2 u_1 , \qquad T_2 = \frac{\alpha_2^2}{2C} \sin^2 \theta_0 \cos^2 u_1 ,$$

die wir auch in der Form

$$(7^*) \qquad T_1 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \sin^2 u_1 , \qquad T_2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \cos^2 u_1$$

schreiben können. Die lebendige Kraft T ist hiermit *explicite* in den Veränderlichen α_i und u_i ausgedrückt, und es ist

$$(8) \qquad T = \frac{\alpha_2^2}{2C} + k_1 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \sin^2 u_1 + k_2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \cos^2 u_1 ,$$

wo

$$(8^*) \qquad k_1 = \frac{C - A}{A} , \quad k_2 = \frac{C - B}{B} .$$

Ist der rotierende Körper symmetrisch um die C-Achse, so dass $A = B$ ist, so hat man $k_1 = k_2$ und

$$(9) \qquad T = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C - A}{A} \cdot \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} .$$

[3]. Wenn keine störenden Kräfte vorhanden sind, hat man

$$H = T ,$$

wo für T der Ausdruck (8) einzuführen ist. Die Differentialgleichungen

$$(10) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u_i} ; \quad \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}$$

können offenbar unmittelbar auf Quadratur gebracht werden. Bekanntlich hat JACOBI das Problem von der Rotation eines festen Körpers, der keinen äusseren Kräften unterworfen ist,

integriert. Seine Lösung hat aber nicht eine reelle Bedeutung für alle Werte der Anfangsgeschwindigkeiten, und es erübrigt noch eine vollständige Diskussion der verschiedenen Bewegungsformen, die hier auftreten können, durchzuführen. Eine solche Diskussion kann leicht geschehen mit Hülfe der Differentialgleichungen (10).[1]

[4]. Wir werden uns zunächst mit der Entwickelung des Potentials (U) der äusseren Kräfte beschäftigen. Da

$$U = \frac{3\mu}{2r^3}[A k_1 \cos^2\alpha + B k_2 \cos^2\beta] \tag{11}$$

ist, handelt es sich zuerst um die Darstellung der Cosinus der Winkel α und β zwischen den Achsen der Trägheitsmomente A und B des rotierenden Körpers und dem Radius Vector r des störenden Körpers. Der Vollständigkeit wegen werden wir gleichzeitig den Ausdruck für den Cosinus des Winkels γ zwischen den genannten Radius Vector und der Achse des Trägheitsmomentes C durch die kanonischen Veränderlichen darstellen. Die letztgenannte Grösse kommt in der Tat direkt zur Anwendung, wenn die Trägheitsmomente A und B einander gleich sind.

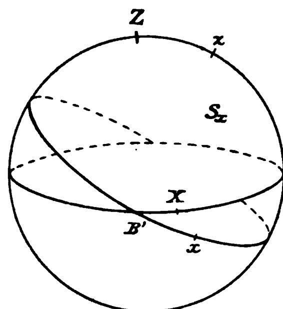


Fig. 1.

Es sei in Fig. 1 S der Ort des störenden Körpers auf eine Einheitssphäre projiziert, deren Zentrum im Schwerpunkt des rotierenden Körpers liegt. Wenn weiter X, Y, Z die Projektion der im Raume festen Achsen, x, y, z die Projektion der im Körper festen Achsen bezeichnen, so hat man

[1] Man vergleiche in Bezug hierauf die »Mechanik des Himmels» von C. V. L. Charlier, Bd 2. S. 375 ff.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos SX \cos xX + \cos SY \cos xY + \cos SZ \cos xZ\,, \\
\cos\beta &= \cos SX \cos yX + \cos SY \cos yY + \cos SZ \cos yZ\,, \\
\cos\gamma &= \cos SX \cos zX + \cos SY \cos zY + \cos SZ \cos zZ\,.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Für die Grössen $\cos SX$, $\cos SY$, $\cos SZ$ hat man die Ausdrücke

$$
\cos SX = \frac{x_0}{r}, \quad \cos SY = \frac{y_0}{r}, \quad \cos SZ = \frac{z_0}{r}, \tag{13}
$$

wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des störenden Körpers bezeichnen.

Werden Polarkoordinaten eingeführt, indem mit b und λ die Breite und die Länge des störenden Körpers bezeichnet werden, so hat man

$$
\begin{aligned}
\cos SX &= \cos b \cos\lambda\,, \\
\cos SY &= \cos b \sin\lambda\,, \\
\cos SZ &= \sin b\,.
\end{aligned} \tag{14}
$$

[5]. Was die übrigen Richtungscosinus betrifft, so können sie bekanntlich durch die EULER'schen Winkel φ, ψ und θ ausgedrückt werden. Man hat in der Tat[1]

$$
\begin{aligned}
\cos xX &= \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta\,, \\
\cos xY &= -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta\,, \\
\cos xZ &= -\sin\varphi\sin\theta
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos yX &= -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta\,, \\
\cos yY &= \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta\,, \\
\cos yZ &= -\cos\varphi\sin\theta
\end{aligned} \tag{15*}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos zX &= \sin\psi\sin\theta\,, \\
\cos zY &= \cos\psi\sin\theta\,, \\
\cos zZ &= \cos\theta\,.
\end{aligned} \tag{15**}
$$

Wenn *mehrere* störenden Körper gleichzeitig berücksichtigt werden müssen, so ist es zu empfehlen, die Ausdrücke

[1] Man vergleiche TISSERAND: »Mécanique céleste» T. II. S. 373.

(13) für $\cos SX$, $\cos SY$ und $\cos SZ$ in Anwendung zu bringen. Für einen einzigen störenden Körper ist die Form (14) vorzuziehen.

Wir fangen mit dem letzteren Fall an.

[6]. Werden die Ausdrücke (14), (15), (15*) und (15**) in (12) eingesetzt, so nehmen diese Formeln die folgende Form an:

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos b\,[\cos\varphi\cos(\psi+\lambda)+\sin\varphi\sin(\psi+\lambda)\cos\theta] \\
&\quad -\sin b\sin\varphi\sin\theta, \\
\cos\beta &= \cos b\,[-\sin\varphi\cos(\psi+\lambda)+\cos\varphi\sin(\psi+\lambda)\cos\theta] \\
&\quad -\sin b\cos\varphi\sin\theta, \\
\cos\gamma &= \cos b\sin\theta\sin(\psi+\lambda)+\sin b\cos\theta.
\end{aligned}
$$

In diese Formeln sind nun, statt der EULER'schen Formeln, die kanonischen Elemente einzuführen. Diese Transformation geschieht mit Hülfe der Formeln (29), (29*) und (*a*) — (*f*) Seite 17 in *M*.

Aus diesen Formeln erhält man in der Tat

$$
\begin{aligned}
&\cos u_1\cos u_2-\sin u_1\sin u_2\cos\theta_0 = \\
&\quad\cos\varphi\cos(\psi+u_3)+\sin\varphi\sin(\psi+u_3)\cos\theta; \\
&\cos\varepsilon\,[\cos u_1\sin u_2+\sin u_1\cos u_2\cos\theta_0]-\sin\varepsilon\sin\theta_0\sin u_1 = \\
&\quad\cos\varphi\sin(\psi+u_3)-\sin\varphi\cos(\psi+u_3)\cos\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin u_1\cos u_2+\cos u_1\sin u_2\cos\theta_0 = \\
&\quad-\sin\varphi\cos(\psi+u_3)+\cos\varphi\sin(\psi+u_3)\cos\theta; \\
&\cos\varepsilon\,[-\sin u_1\sin u_2+\cos u_1\cos u_2\cos\theta_0]-\sin\varepsilon\sin\theta_0\cos u_1 = \\
&\quad\sin\varphi\sin(\psi+u_3)+\cos\varphi\cos(\psi+u_3)\cos\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\theta\sin(\psi+u_3) &= \sin\theta_0\sin u_2, \\
\sin\theta\cos(\psi+u_3) &= \cos\theta_0\sin\varepsilon+\sin\theta_0\cos\varepsilon\cos u_2.
\end{aligned}
$$

Hieraus werden nun die folgende Ausdrücke für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ abgeleitet.

$$
(17)\quad \begin{aligned}
\cos\alpha = \cos b \{&\cos(u_3 - \lambda)[\cos u_1 \cos u_2 - \sin u_1 \sin u_2 \cos\theta_0] \\
&+ \cos\varepsilon \sin(u_3 - \lambda)[\cos u_1 \sin u_2 + \sin u_1 \cos u_2 \cos\theta_0] \\
&- \sin\varepsilon \sin(u_3 - \lambda) \sin\theta_0 \sin u_1\} \\
+ \sin b \{&\sin\varepsilon [\cos u_1 \sin u_2 + \sin u_1 \cos u_2 \cos\theta_0] \\
&+ \cos\varepsilon \sin\theta_0 \sin u_1\};
\end{aligned}
$$

$$
(18)\quad \begin{aligned}
\cos\beta = \cos b \{&\cos(u_3 - \lambda)[\sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2 \cos\theta_0] \\
&+ \cos\varepsilon \sin(u_3 - \lambda)[\sin u_1 \sin u_2 - \cos u_1 \cos u_2 \cos\theta_0] \\
&+ \sin\varepsilon \sin(u_3 - \lambda) \sin\theta_0 \cos u_1\} \\
+ \sin b \{&\sin\varepsilon [\sin u_1 \sin u_2 - \cos u_1 \cos u_2 \cos\theta_0] \\
&- \cos\varepsilon \sin\theta_0 \cos u_1\};
\end{aligned}
$$

$$
(19)\quad \begin{aligned}
\cos\gamma = \cos b \{&\sin\theta_0 [\sin u_2 \cos(u_3 - \lambda) - \cos u_2 \sin(u_3 - \lambda) \cos\varepsilon] \\
&- \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin(u_3 - \lambda)\} \\
+ \sin b \{&\cos\theta_0 \cos\varepsilon - \sin\theta_0 \sin\varepsilon \cos u_2\}.
\end{aligned}
$$

[7]. Wie ersichtlich kommt in den obigen Ausdrücken die Grösse u_3 nur in der Kombination $u_3 - \lambda$ vor. Es empfiehlt sich aus diesem Grund einen Variabelumtausch auszuführen, indem man die neuen Elemente α'_3 und u'_3 durch die Gleichungen

$$
(20)\qquad \alpha'_3 = \alpha_3, \quad u'_3 = u_3 - \lambda
$$

einführt.

Die neuen Elemente werden auch *kanonisch*, wenn man eine neue charakteristische Funktion H' durch die Gleichung

$$
(21)\qquad H' = H + \alpha_3 \frac{d\lambda}{dt}
$$

einführt.

Wir werden diese Elemente im Folgenden benutzen.

[8]. Die Ausdrücke (17), (18) und (19) für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ lassen sich nach Vielfachen von u_1, u_2 und u_3 entwickeln und erhalten dann folgende Form.

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad \cos\alpha = \cos b \Bigg\{ & \frac{1-\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\cos(-u_1+u_2+u'_3) \\
& + \frac{1-\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\cos(u_1-u_2+u'_3) \\
& + \frac{1+\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\cos(u_1+u_2-u'_3) \\
& + \frac{1+\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\cos(u_1+u_2+u'_3) \\
& - \frac{1}{2}\sin\theta_0\sin\varepsilon\cos(u_1-u'_3) \\
& + \frac{1}{2}\sin\theta_0\sin\varepsilon\cos(u_1+u'_3)\Bigg\} \\
+ \sin b \Bigg\{ & -\frac{1-\cos\theta_0}{2}\sin\varepsilon\sin(u_1-u_2) \\
& + \frac{1+\cos\theta_0}{2}\sin\varepsilon\sin(u_1+u_2) \\
& + \sin\theta_0\cos\varepsilon\sin u_1\Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad \cos\beta = \cos b \Bigg\{ & \frac{1-\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\sin(-u_1+u_2+u'_3) \\
& + \frac{1-\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\sin(u_1-u_2+u'_3) \\
& + \frac{1+\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\sin(u_1+u_2-u'_3) \\
& + \frac{1+\cos\theta_0}{2}\cdot\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\sin(u_1+u_2+u'_3) \\
& - \frac{1}{2}\sin\theta_0\sin\varepsilon\sin(u_1-u'_3) \\
& + \frac{1}{2}\sin\theta_0\sin\varepsilon\sin(u_1+u'_3)\Bigg\} \\
+ \sin b \Bigg\{ & \frac{1-\cos\theta_0}{2}\sin\varepsilon\cos(u_1-u_2) \\
& - \frac{1+\cos\theta_0}{2}\sin\varepsilon\cos(u_1-u_2) \\
& - \sin\theta_0\cos\varepsilon\cos u_1\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$(24)\quad \cos\gamma = \cos b \left\{ \sin\theta_0 \frac{1+\cos\varepsilon}{2} \sin(u_2 - u'_3) + \sin\theta_0 \frac{1-\cos\varepsilon}{2} \sin(u_2 + u'_3) - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin u'_3 \right\} + \sin b \left\{ \cos\theta_0 \cos\varepsilon - \sin\theta_0 \sin\varepsilon \cos u_2 \right\}.$$

[9]. Indem für θ_0 und ε die Elemente α_1 und α_3 aus (3) eingeführt werden, erhalten wir nun hieraus nach Quadrieren:

$$(25)\quad \cos^2\alpha = \cos^2 b \left\{ \frac{1}{8}\left(3 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2} + \frac{3\alpha_1^2\alpha'^2_3}{\alpha_2^4}\right) \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$
$$+ \frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$
$$+ \frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$
$$+ \frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u'_3$$
$$- \frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$
$$- \frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u'_3)$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u'_3)$$
$$+ \frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$
$$+ \frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)$$
$$+ \frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u'_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u'_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_2-2u'_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u'_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u'_3)\Bigg\}$$

$$+\sin^2 b\Bigg\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}-\frac{3\alpha_1^2\alpha'^2_3}{\alpha_2^4}\right)$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)\Bigg\}$$

$$+\sin b\cos b\Bigg\{\frac{1}{2}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin u'_3$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+u'_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+u'_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-u'_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-u'_3)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1+u'_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1+u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\sin(2u_2-2u_1+u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\sin(2u_2-2u_1-u'_3)\Bigg\}$$

6) $$\cos^2\beta=\cos^2 b\left\{\frac{1}{8}\left(3-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}+3\frac{\alpha^2_1\alpha'^2_3}{\alpha^4_2}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha^2_2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos u_2$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\cos 2u_2$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(3\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_1}-1\right)\cos 2u_1$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\left(3\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}-1\right)\cos 2u'_3$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\cos(2u_2-2u_1)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u'_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u'_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u'_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u'_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u'_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u'_3)\Bigg\}$$

$$+\sin^2 b\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}-3\frac{\alpha_1^2\alpha'^2_3}{\alpha_2^4}\right)\right.$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$\left.+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)\right\}$$

$$+\sin b\cos b\left\{\frac{1}{2}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin u'_3\right.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+u'_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-u'_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+u'_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1+u'_3)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1-u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+u'_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1+u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1-u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\,\sin(2u_2-2u_1+u'_3)$$

$$\left.-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\,\sin(2u_2-2u_1-u'_3)\right\}$$

$$(27)\quad \cos^2\gamma=\cos^2 b\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}+\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2}-3\frac{\alpha^2_1\alpha'^2_3}{\alpha^4_2}\right)\right.$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha^2_2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\cos 2u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\left(3\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}-1\right)\cos 2u'_3$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2+2u'_3)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos(u_2-2u'_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u'_3)$$

$$\left.-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u'_3)\right\}$$

$$+\sin^2 b\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}+3\frac{\alpha^2_1\alpha'^2_3}{\alpha^4_2}\right)\right.$$

$$+2\frac{\alpha_1\alpha'_3}{\alpha^2_2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\cos u_2$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\cos 2u_2\right\}$$

$$+\sin b\cos b\left\{-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\sin u_3\right.$$

$$+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sin(u_2+u'_3)$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}}\sin(u_2-u'_3)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\sin(2u_2+u'_3)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha'_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha^2_2}}\sin(2u_2-u'_3)\Bigg\}.$$

[10]. Werden die Ausdrücke (25) und (26) in (11) eingesetzt, erhält man die vollständige Form des Potentials in den kanonischen Elementen α_i und u_i.

Da in den astronomischen Rotationsproblemen immer, so viel bekannt ist, θ_0 klein ist und weiter in vielen Fällen — wie z. B. für den Mond — auch ε einen kleinen Wert hat, so ist es häufig vorteilhaft für α_i und u_i andere Elemente einzuführen. Wir führen aus diesem Grund die Veränderlichen ξ_i und η_i durch folgende Formeln ein

$$\begin{aligned}
&\xi_1=\alpha_2; && \eta_1= u_1+u_2-u'_3,\\
(28)\quad &\xi_2=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_2(1-\cos\theta_0); && \eta_2=-u_1,\\
&\xi_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2(1-\cos\varepsilon); && \eta_3= u'_3.
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ nehmen dann folgende Form an.

$$(29)\quad \cos\alpha=\cos b\Bigg\{\frac{\xi_2\xi_3}{4\xi_1\xi_1}(\cos\eta_1+2\eta_2+2\eta_3)$$

$$+\frac{\xi_2}{2\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos(\eta_1+2\eta_2)$$

$$+\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos\eta_1$$

$$+\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_3}{2\xi_1}\cos(\eta_1+2\eta_3)$$

$$+\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\frac{\sqrt{2\xi_2}\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\sin\eta_2\sin\eta_3\Bigg\}$$

$$+\sin b\left\{\frac{\xi_2}{2\xi_1}\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\sin(\eta_1+2\eta_2+\eta_3)\right.$$

$$+\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\sin(\eta_1+\eta_3)$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_2\right\}.$$

$$(30)\quad \cos\beta=\cos b\left\{-\frac{\xi_2\xi_3}{4\xi_1\xi_1}\sin(\eta_1+2\eta_2+2\eta_3)\right.$$

$$-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin(\eta_1+2\eta_2)$$

$$+\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin\eta_1$$

$$+\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_3}{2\xi_1}\sin(\eta_1+2\eta_3)$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\cos\eta_2\sin\eta_3\right\}$$

$$+\sin b\left\{\frac{\xi_2}{2\xi_1}\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\cos(\eta_1+2\eta_2+\eta_3)\right.$$

$$-\left(1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\cos(\eta_1+\eta_3)$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\cos\eta_2\right\}.$$

$$(31)\quad \cos\gamma=\cos b\left\{\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin(\eta_1+\eta_2)\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\frac{\xi_3}{2\xi_1}\sin(\eta_1+\eta_2+2\eta_3)$$

$$\left.-\left(1-\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\sin\eta_3\right\}$$

$$+\sin b\left\{\left(1-\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2\xi_2}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\eta_1}}\cos(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\right\}.$$

[11]. Wenn θ_0 und ε sehr klein sind, so können unter Umständen auch die obigen Elemente Schwierigkeiten bereiten und es empfiehlt sich neue Veränderliche einzuführen in ähnlicher Weise wie im Drei-Körper-Problem bei sehr kleinen Neigungen und Excentricitäten andere Veränderliche vorzuziehen sind. Wir setzen

$$(32)\qquad \begin{aligned} u&=\sqrt{2\xi_2}\cos\eta_2, & p&=\sqrt{2\xi_3}\cos\eta_3\\ v&=\sqrt{2\xi_2}\sin\eta_2, & q&=\sqrt{2\xi_3}\sin\eta_3. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$(33)\qquad \begin{aligned} u^2+v^2&=2\xi_2; & p^2+q^2&=2\xi_3,\\ u^2-v^2&=2\xi_2\cos 2\eta_2; & p^2-q^2&=2\xi_3\cos 2\eta_3,\\ 2uv&=2\xi_2\sin 2\eta_2; & 2pq&=2\xi_3\sin 2\eta_3. \end{aligned}$$

Die Richtungscosinus erhalten nun die Form:

$$(34)\quad \cos\alpha=\cos b\left\{\cos\eta_1\left(1-\frac{v^2}{2\xi_1}-\frac{q^2}{2\xi_1}+\frac{v^2q^2}{4\xi_1^2}-\frac{uvpq}{4\xi_1^2}\right)\right.$$

$$-\sin\eta_1\left(\frac{uv+pq}{2\xi_1}-\frac{uvq^2+v^2pq}{4\xi_1\xi_1}\right)$$

$$\left.+\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\frac{vq}{\xi_1}\right\}$$

$$+\sin b\left\{\cos\eta_1\left(\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(u^2-v^2)q+2uvp}{4\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\right)$$

$$+ \sin \eta_1 \left(\frac{p}{\sqrt{\xi_1}} \left(1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right) \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right.$$

$$\left. + \frac{(u^2-v^2)\,p - 2uvq}{4\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right)$$

$$\left. - \frac{v}{\sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}} \left(1 - \frac{p^2+q^2}{2\xi_1}\right) \right\};$$

$$(35) \quad \cos\beta = \cos b \left\{ \cos \eta_1 \left(\frac{-uv+pq}{2\xi_1} + \frac{uvq^2 - u^2pq}{4\xi_1\xi_1} \right) \right.$$

$$+ \sin \eta_1 \left(1 - \frac{u^2}{2\xi_1} - \frac{q^2}{2\xi_1} + \frac{q^2u^2}{4\xi_1\xi_1} + \frac{uvpq}{4\xi_1\xi_1}\right)$$

$$\left. + \frac{uq}{\xi} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right\}$$

$$+ \sin b \left\{ \cos \eta_1 \left(- \frac{p}{\sqrt{\xi_1}} \left(1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right) \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(u^2-v^2)\,p - 2uvq}{4\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right)$$

$$+ \sin \eta_1 \left(\frac{q}{\sqrt{\xi_1}} \left(1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right) \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right.$$

$$\left. - \frac{(u^2-v^2)\,q + 2uvp}{4\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}} \right)$$

$$\left. - \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}} \left(1 - \frac{p^2+q^2}{2\xi_1}\right) \frac{u}{\sqrt{\xi_1}} \right\}.$$

$$(36) \quad \cos\gamma = \cos b \left\{ \cos \eta_1 \left(\frac{v}{\sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}} \left(1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{v(p^2-q^2) + 2upq}{4\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}} \right)$$

$$+\sin\eta_1\left(\frac{u}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\left(1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right)\right.$$

$$+\frac{u(p^2-q^2)-2vpq}{4\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\Bigg)$$

$$-\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\Bigg\}$$

$$+\sin b\left\{\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{2\xi_1}\right)\right.$$

$$-\cos\eta_1\frac{up-vq}{\xi_1}\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}$$

$$\left.+\sin\eta_1\frac{vp+uq}{\xi_1}\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\right\}.$$

[12]. Hieraus erhält man für $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ und $\cos^2\gamma$ die folgenden Ausdrücke, wo nur Glieder bis zur vierten Potenz *incl.* von u, v, p und q mitgenommen worden sind.

Die Entwickelungen sind mittelst der Formel

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{37}$$

kontrolliert worden.

$$\text{(38)}\quad \cos^2\alpha=\cos^2 b\left\{\cos^2\eta_1\left[1-\frac{1}{\xi_1}(v^2+q^2)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{1}{4}v^4+\frac{1}{4}q^4+v^2q^2-\frac{1}{2}uvpq\right)\right]$$

$$+\sin^2\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{1}{4}u^2v^2+\frac{1}{4}p^2q^2+\frac{1}{2}uvpq\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\xi_1^2}v^2q^2$$

$$+\cos\eta_1\sin\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1}(-uv-pq)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{1}{2}uv^3+uvq^2+v^2pq+\frac{1}{2}pq^3\right)\right]$$

$$+\cos\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1}2vq+\frac{1}{\xi_1^2}\left(-\frac{1}{4}u^2vq-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{5}{4}v^3q-\frac{1}{4}vp^2q-\frac{5}{4}vq^3\right)\right]$$

$$\left.+\sin\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1^2}(-uv^2q-vpq^2)\right]\right\}$$

$$+\sin^2 b\frac{1}{\xi_1}\{q^2\cos^2\eta_1+p^2\sin^2\eta_1+v^2+$$

$$+2pq\cos\eta_1\sin\eta_1-2qv\cos\eta_1-2pv\sin\eta_1\}$$

$$+2\cos b\sin b\left\{\cos^2\eta_1\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}q+\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(-v^2q+\frac{1}{2}uvp-\frac{1}{8}p^2q-\frac{5}{8}q^3\right)\right]\right.$$

$$+\sin^2\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(-\frac{1}{2}uvp-\frac{1}{2}p^2q\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}v^2q$$

$$+\cos\eta_1\sin\eta_1\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}p+\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(-v^2p-uvq-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{8}p^3-\frac{9}{8}pq^2\right)\right]$$

$$+\cos\eta_1\left[-\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}v+\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(\frac{1}{8}u^2v+\frac{5}{8}v^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}vp^2+2vq^2\right)\right]$$

$$\left.+\sin\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(\frac{1}{2}uv^2+\frac{3}{2}vpq\right)\right]\right\}.$$

$$(39)\quad \cos^2\beta = \cos^2 b \Bigg\{\cos^2\eta_1 \frac{1}{\xi_1^2}\left[\frac{1}{4}u^2v^2 + \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{2}uvpq\right]$$

$$+ \sin^2\eta_1\Bigg[1 - \frac{1}{\xi_1}(u^2 + q^2) +$$

$$+ \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{4}q^4 + q^2u^2 + \frac{1}{2}uvpq\right)\Bigg]$$

$$+ \frac{1}{\xi_1^2}u^2q^2$$

$$+ \cos\eta_1\sin\eta_1\Bigg[\frac{1}{\xi_1}(-uv + pq) +$$

$$+ \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{1}{2}u^3v + uvq^2 + u^2pq - \frac{1}{2}pq^3\right)\Bigg]$$

$$+ \cos\eta_1\left[\frac{1}{\xi_1^2}(-u^2vq + upq^2)\right]$$

$$+ \sin\eta_1\Bigg[\frac{1}{\xi_1}2uq + \frac{1}{\xi_1^2}\Bigg(-\frac{5}{4}u^3q - \frac{5}{4}uq^3 -$$

$$-\frac{1}{4}uv^2q - \frac{1}{4}up^2q\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$

$$+ \sin^2 b\frac{1}{\xi_1}\{p^2\cos^2\eta_1 + q^2\sin^2\eta_1 + u^2 -$$

$$- 2pq\cos\eta_1\sin\eta_1 + 2up\cos\eta_1 - 2uq\sin\eta_1\}$$

$$+ 2\cos b\sin b\Bigg\{\cos^2\eta_1\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(\frac{1}{2}uvp - \frac{1}{2}p^2q\right)$$

$$+ \sin^2\eta_1\Bigg[\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}q + \frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\Bigg(-u^2q - \frac{1}{2}uvp -$$

$$-\frac{1}{8}p^2q - \frac{5}{8}q^3\Bigg)\Bigg]$$

$$- \frac{u^2 q}{\xi_1 \sqrt{\xi_1}}$$

$$+ \cos \eta_1 \sin \eta_1 \left[- \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} p + \frac{1}{\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \left(u^2 p - uvq + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8} p^3 + \frac{9}{8} pq^2 \right) \right]$$

$$+ \cos \eta_1 \frac{1}{\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \left[\frac{1}{2} u^2 v - \frac{3}{2} upq \right].$$

$$+ \sin \eta_1 \left[- \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} u + \frac{1}{\xi_1 \sqrt{\xi_1}} \left(\frac{5}{8} u^3 + \frac{1}{8} uv^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} up^2 + 2 uq^2 \right) \right] \Bigg\}.$$

$$(40) \quad \cos^2 \gamma = \cos^2 b \Bigg\{ \cos^2 \eta_1 \left[\frac{1}{\xi_1} v^2 + \frac{1}{\xi_1^2} \left(- \frac{1}{4} u^2 v^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4} v^4 - v^2 q^2 + uvpq \right) \right]$$

$$+ \sin^2 \eta_1 \left[\frac{1}{\xi_1} u^2 + \frac{1}{\xi_1^2} \left(- \frac{1}{4} u^4 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4} u^2 v^2 - u^2 q^2 - uvpq \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{\xi_1} q^2 + \frac{1}{\xi_1^2} \left(- u^2 q^2 - v^2 q^2 - \frac{1}{4} p^2 q^2 - \frac{1}{4} q^4 \right)$$

$$+ \cos \eta_1 \sin \eta_1 \left[\frac{1}{\xi_1} 2uv + \frac{1}{\xi_1^2} \left(- \frac{1}{2} u^3 v - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} uv^3 - 2 uvq^2 - u^2 pq - v^2 pq \right) \right]$$

$$+ \cos \eta_1 \left[- \frac{1}{\xi_1} 2vq + \frac{1}{\xi_1^2} \left(\frac{5}{4} u^2 vq + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{5}{4} v^3 q + \frac{5}{4} vq^3 - upq^2 + \frac{1}{4} vp^2 q \right) \right]$$

$$+ \sin r_{,1}\left[-\frac{1}{\xi_1}2uq + \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{5}{4}u^3q + \frac{5}{4}uv^2q + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{5}{4}uq^3 + \frac{1}{4}up^2q + vpq^2\right)\right]\right\}$$

$$+ \sin^2 b\left\{1 - \frac{1}{\xi_1}(u^2 + v^2 + p^2 + q^2)\right.$$

$$\left. + 2\cos r_{,1}\frac{1}{\xi_1}(-up + vq) + 2\sin r_{,1}\frac{1}{\xi_1}(vp + uq)\right\}$$

$$+ \cos b \sin b\left\{\cos^2 r_{,1}\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}(-uvp + v^2q)\right.$$

$$+ \sin^2 r_{,1}\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}(uvp + u^2q)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}q + \frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(u^2q + v^2q + \frac{5}{8}p^2q + \frac{5}{8}q^3\right)$$

$$+ \cos r_{,1}\sin r_{,1}\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}(-u^2p + 2uvq + v^2p)$$

$$+ \cos r_{,1}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}v + \frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(-\frac{5}{8}u^2v - \frac{5}{8}v^3 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{2}upq - \frac{1}{2}vp^2 - 2vq^2\right)\right]$$

$$+ \sin r_{,1}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}u + \frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\left(-\frac{5}{8}u^3 - \frac{5}{8}uv^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2}up^2 - 2uq^2 - \frac{3}{2}vpq\right)\right]\right\}.$$

[13]. Der vollständige Ausdruck für $\cos^2\gamma$ lautet:

$$(41)\quad \cos^2\gamma = \cos^2 b\left\{\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right) + \frac{q^2}{\xi_1}\left(1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right) - \right.$$

$$- \frac{3q^2}{2\xi_1}\frac{u^2+v^2}{\xi_1}\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\left(1 - \frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right)$$

$$+\left[\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\left(\frac{q^2}{\xi_1^2}(vq-up)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{qv}{\xi_1}\right)\right]\cos\eta_1$$

$$+\left[-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}+\frac{q}{2\xi_1^2}(u(uq+vp)+v(up-vq))+\right.$$

$$\left.+\frac{q^2}{8\xi_1^2}((pu-vq)^2-(pv+uq)^2)\right]\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\cos 2\eta_1$$

$$+\left(\frac{q^2}{\xi_1^2}(vp+uq)-\frac{2uq}{\xi_1}\right)\cdot\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\cdot\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\sin\eta_1$$

$$+\left[\frac{uv}{\xi_1}+\frac{pq}{2\xi_1^2}(u^2-v^2)\left(1-\frac{q^2}{2\xi_1}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{uvq^2}{\xi_1^2}\left(1+\frac{p^2-q^2}{2\xi_1}\right)\right]\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\sin 2\eta_1\right\}$$

$$+\sin^2 b\left\{1-\frac{1}{\xi_1}(u^2+v^2+p^2+q^2)+\frac{1}{4\xi_1^2}(4(u^2+v^2)(p^2+q^2)+\right.$$

$$+(u^2+v^2+p^2+q^2)^2)-\frac{3(u^2+v^2)(p^2+q^2)}{4\xi_1^3}\left(u^2+v^2+p^2+q^2-\right.$$

$$\left.-\frac{(p^2+q^2)(u^2+v^2)}{4\xi_1}\right)$$

$$-\frac{2}{\xi_1}(up-vq)\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right)$$

$$\cdot\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\cos\eta_1$$

$$+\frac{1}{2\xi_1}((up-vq)^2-(vp+uq)^2)\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right)\cos 2\eta_1$$

$$+\frac{2}{\xi_1}(vp+uq)\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{2\xi_1}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\sin\eta_1$$

$$-\frac{1}{\xi_1^2}(vp+uq)(up-vq)\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}\right)\sin 2\eta_1\Bigg\}$$

$$+\sin b\cos b\left\{\frac{9}{\sqrt{\xi_1}}\left(3\frac{u^2+v^2}{\xi_1}-2\right)\left(1-\frac{p^2+q^2}{2\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}\left[\left(v-\frac{q}{\xi_1}(vq-up)\right)\left(3-\frac{p^2+q^2}{\xi_1}\right)-v\right]\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\cos\eta_1$$

$$-\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\Bigg[2uvp+q(u^2-v^2)+\frac{q}{2\xi_1}((up-vq)^2-$$

$$-(vp+uq)^2)\Bigg]\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\cos 2\eta_1$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}\left[\left(u-q\frac{uq+vp}{\xi_1}\right)\left(3-\frac{p^2+q^2}{\xi_1}\right)-u\right]\left(1-\frac{u^2+v^2}{2\xi_1}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}}\sin\eta_1$$

$$-\frac{1}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\Bigg[p(u^2-v^2)\left(1-\frac{q^2}{\xi_1}\right)-$$

$$\left.-uvq\left(2-\frac{p^2-q^2}{\xi_1}\right)\Bigg]\left(1-\frac{u^2+v^2}{4\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\sin 2\eta_1\right\}.$$

[14]. Ist die Oblikvität ε gross, so empfiehlt sich die Veränderlichen ξ_3 und η_3 zu behalten und nur nach Potenzen von u und zu entwickeln. Die dies bezüglichen Formeln lauten:

42)
$$\cos^2\alpha=\cos^2 b\left\{\frac{1}{2}-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2\eta_3+\frac{1}{8}\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}\cos(2\eta_1+4\eta_3)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\cos 2\eta_1+\frac{\xi_3}{2\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos(2\eta_1+2\eta_3)$$

$$-2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin(\eta_1+\eta_3)\sin^2\eta_3+\cos\eta_1\sin\eta_3\right)\cdot v$$

$$-\frac{1}{2\xi_1}\left[1-6\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2\eta_3+\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos(2\eta_1+2\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\cos(2\eta_1+4\eta_3)+\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\cos 2\eta_1\right]v^2$$

$$-\frac{1}{2\xi_1}\left[\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\sin(2\eta_1+4\eta_3)+\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\sin 2\eta_1+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin(2\eta_1+2\eta_3)\right]\cdot uv\right\}$$

$$+\sin^2 b\left\{2\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2(\eta_1+\eta_3)\right.$$

$$-2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\sin(\eta_1+\eta_3)\cdot v$$

$$+\frac{1}{\xi_1}\left[1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)(3-\cos(2\eta_1+2\eta_3))\right]\cdot v^2$$

$$\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1^2}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin(2\eta_1+2\eta_3)\cdot uv\right\}$$

$$+\sin b\cos b\left\{-\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3-1\right)\sin(2\eta_1+\eta_3)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1\sin\eta_3-\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_3\right]$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\xi_1}}\left[\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\cos\eta_1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(3-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin(\eta_1+\eta_3)\sin\eta_3\right]\cdot v$$

$$-\frac{\sqrt{2\xi_1}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\sin(2\eta_1+\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1\sin\eta_3+3\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_3\right]v^2$$

$$+\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-\frac{2\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\cos(2\eta_1+\eta_3)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin 2\eta_1\sin\eta_3\right]\cdot uv\right\}.$$

3) $$\cos^2\beta = \cos^2 b \Bigl\{ \frac{1}{2} - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)\sin^2\eta_3 - \frac{\xi_3^2}{8\xi_1^2}\cos(2\eta_1 + 4\eta_3) -$$

$$- \frac{1}{2}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)^2 \cos 2\eta_1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\cos(2\eta_1 + 2\eta_3)$$

$$+ 2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\sqrt{1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}}\Bigl[\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos(\eta_1 + \eta_3)\sin^2\eta_3 + \sin\eta_1 \sin\eta_3\Bigr]\cdot u$$

$$- \frac{1}{2\xi_1}\Bigl[1 - 6\frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)\sin^2\eta_3 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)\cos(2\eta_1 + 2\eta_3) -$$

$$- \frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\cos(2\eta_1 + 4\eta_3) - \Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)^2 \cos 2\eta_1\Bigr] u^2$$

$$- \frac{1}{2\xi_1}\Bigl[\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\sin(2\eta_1 + 4\eta_3) + \Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)^2 \sin 2\eta_1 +$$

$$+ \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\sin(2\eta_1 + 2\eta_3)\Bigr]\cdot uv\Bigr\}$$

$$+ \sin^2 b\Bigl\{2\frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)\cos^2(\eta_1 + \eta_3)$$

$$+ 2\frac{\sqrt{2\xi_1}}{\xi_1}\sqrt{1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\cos(\eta_1 + \eta_3)\cdot u$$

$$+ \frac{1}{\xi_1}\Bigl[1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)(3 + \cos(2\eta_1 + 2\eta_3))\Bigr]\cdot u^2$$

$$+ \frac{\xi_3}{\xi_1^2}\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}\Bigr)\sin(2\eta_1 + 2\eta_3)\cdot uv\Bigr\}$$

$$+ \sin b\cos b\Bigl\{\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1 - \frac{\xi_3}{2\xi_1}}\Bigl[\Bigl(2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3 - 1\Bigr)\sin(2\eta_1 + \eta_3) -$$

$$- \frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1 \sin\eta_3 + \Bigl(1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\sin\eta_3\Bigr]$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\xi_1}}\Bigl[\Bigl(1 - \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\sin\eta_1 + \frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigl(3 - 2\frac{\xi_3}{\xi_1}\Bigr)\cos(\eta_1 + \eta_3)\sin\eta_3\Bigr]\cdot u$$

$$+\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\sin(2\eta_1+\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1\sin\eta_3-3\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_3\right]\cdot u^2$$

$$+\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\cos(2\eta_1+\eta_3)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin 2\eta_1\sin\eta_3\right]\cdot uv\right\}.$$

$$(44)\quad \cos^2\gamma=\cos^2 b\left\{2\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2\eta_3\right.$$

$$-2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\cos(\eta_1+\eta_3)+\sin\eta_1\sin\eta_3\right)\cdot u$$

$$+2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin(\eta_1+\eta_3)\sin^2\eta_3+\cos\eta_1\sin\eta_3\right)\cdot v$$

$$+\frac{1}{2\xi_1}\left[1-6\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2\eta_3-\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\cos(2\eta_1+4\eta_3)-\right.$$

$$\left.-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos(2\eta_1+2\eta_3)-\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\cos 2\eta_1\right]\cdot u^2$$

$$+\frac{1}{2\xi_1}\left[1-6\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin^2\eta_3+\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\cos(2\eta_1+4\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\cos(2\eta_1+2\eta_3)+\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\cos 2\eta_1\right]\cdot v^2$$

$$+\frac{1}{\xi_1}\left[\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}\sin(2\eta_1+4\eta_3)+\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)^2\sin 2\eta_1+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin(2\eta_1+2\eta_3)\right]\cdot uv\right\}$$

$$+\sin^2 b\left\{\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right.$$

$$-2\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\cos(\eta_1+\eta_2)\cdot u$$

$$+\,2\,\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\,\sin(\eta_1+\eta_2)\cdot v$$

$$+\,\frac{1}{\xi_1}\left[-1+\frac{\xi_3}{\xi_2}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)(3+\cos(2\eta_1+2\eta_3))\right]\cdot u^2$$

$$-\,\frac{1}{\xi_1}\left[1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)(3-\cos(2\eta_1+2\eta_3))\right]\cdot v^2$$

$$-\,2\,\frac{\xi_3}{\xi_1^2}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin(2\eta_1+2\eta_3)\cdot uv\Bigg\}$$

$$+\sin b\cos b\left\{-2\,\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\sqrt{\xi_1}}\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\,\sin\eta_3\right.$$

$$+\,\frac{2}{\sqrt{\xi_1}}\left[\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_1+\frac{\xi_3}{\xi_3}\left(3-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\cos(\eta_1+\eta_3)\sin\eta_3\right]\cdot u$$

$$+\,\frac{2}{\sqrt{\xi_1}}\left[\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\cos\eta_1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(3-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin(\eta_1+\eta_3)\sin\eta_3\right]\cdot v$$

$$-\,\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\sin(2\eta_1+\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1\sin\eta_3-3\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_3\right]\cdot u^2$$

$$+\,\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\sin(2\eta_1+\eta_3)+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\xi_3}{\xi_1}\cos 2\eta_1\sin\eta_3+3\left(1-\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\sin\eta_3\right]\cdot v^2$$

$$-\,2\,\frac{\sqrt{2\xi_3}}{\xi_1\sqrt{\xi_1}}\sqrt{1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}}\left[\left(1-2\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin^2\eta_3\right)\cos(2\eta_1+\eta_3)-\right.$$

$$\left.\left.-\,\frac{\xi_3}{\xi_1}\sin 2\eta_1\sin\eta_3\right]\cdot uv\right\}.$$

[15]. Werden endlich die *rechtwinkligen* Koordinaten x_0, y_0, z_0 des störenden Körpers benutzt, was — wie in Art. [5] schon bemerkt wurde — vorteilhaft sein kann, wenn mehrere störende Körper vorhanden sind, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
(45)\quad \cos^2\alpha = \frac{x_0^2}{r^2}\Bigg[& \frac{1}{8}\left(3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+3\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right) \\
& +\frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2 \\
& +\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2 \\
& +\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1 \\
& +\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3 \\
& -\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1) \\
& +\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1) \\
& -\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_3) \\
& +\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3) \\
& +\frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1) \\
& +\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1) \\
& +\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3) \\
& +\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3) \\
& +\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u_3) \\
& +\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u_3)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{y_0^2}{r^2}\Bigg[\frac{1}{8}\left(3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+3\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2}}\cos(u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{z_0^2}{r^2}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-3\frac{\alpha_1^2\,\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right)\right.$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2v_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$\left.-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)\right]$$

$$+2\frac{x_0\,y_0}{r^2}\left[\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\sin 2u_3\right.$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sin(2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sin(2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_1-2u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{x_0 z_0}{r^2}\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin u_3$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-u_3)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1+u_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1-u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\quad\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1-u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-2u_1-u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{y_0 z_0}{r^2}\Bigg[-\frac{1}{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_3$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2^2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-u_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_1+u_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_1-u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+2u_1-u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-2u_1-u_3)\Bigg].$$

$$(46)\quad \cos^2\beta=\frac{x_0^2}{r^2}\Bigg[\frac{1}{8}\left(3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+3\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u_3)\Big]$$

$$+\frac{y_0^2}{r^2}\left[\frac{1}{8}\left(3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+\frac{3\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_1-2u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{z_0^2}{r^2}\Bigg[\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-3\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right)$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_1$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2+2u_1)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos(2u_2-2u_1)\Bigg].$$

$$+2\frac{x_0 y_0}{r^2}\Bigg[\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\sin 2u_3$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sin(2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{3}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sin(2u_1-2u_3)$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_3)$$

$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_1-2u_3)$$

$$-\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_1+2u_3)$$

$$+\frac{1}{32}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_1-2u_3)\Bigg]$$

$$+\frac{x_0 z_0}{r^3}\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin u_3$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_1-u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1+u_3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_1-u_3)$$

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1+u_3)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_1-u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+u_3)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1+u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+2u_1-u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-2u_1+u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-2u_1-u_3)\Bigg]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{y_0 z_0}{r^2}\Big[-\frac{1}{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}}\cos u_3 \\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1+u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_1-u_3) \\
&\qquad-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1+u_3) \\
&\qquad-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_1-u_3) \\
&\qquad-\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_1+u_3) \\
&\qquad-\frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_1-u_3) \\
&\qquad-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+2u_1+u_3) \\
&\qquad-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+2u_1-u_3) \\
&\qquad+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-2u_1+u_3) \\
&\qquad-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-2u_1-u_3)\Big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(47)\;\cos^2\gamma = \frac{x_0^2}{r^2}\Bigg[& \frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-3\,\frac{\alpha_1^2\,\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right) \\
& -\frac{\alpha_1\,\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2 \\
& -\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2 \\
& -\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\,\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3 \\
& +\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_3) \\
& -\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3) \\
& -\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3) \\
& -\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3)\Bigg] \\
+\frac{y_0^2}{r^2}\Bigg[& \frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}-3\,\frac{\alpha_1^2\,\alpha_3^2}{\alpha_2^4}\right) \\
& -\frac{\alpha_1\,\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2 \\
& -\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2 \\
& +\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\,\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\cos 2u_3 \\
& -\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+2u_3) \\
& +\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-2u_3) \\
& +\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2+2u_3) \\
& +\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\cos(2u_2-2u_3)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{z_0^2}{r^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+3\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{2_2^4}\right)\right.$$

$$+2\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos u_2$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\cos 2u_2\right]+$$

$$+2\frac{x_0y_0}{r^2}\left[-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-1\right)\sin 2u_3\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+2u_3)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-2u_3)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2+2u_3)$$

$$\left.+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2\sin(2u_2-2u_3)\right]$$

$$+\frac{x_0z_0}{r^2}\left[-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin u_3\right.$$

$$+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2+u_3)$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\sin(u_2-u_3)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2+u_3)$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(2u_2-u_3)\right]$$

$$+\frac{y_0z_0}{r_2}\left[\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(1-3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}}\cos u_3\right.$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2+u_3)$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\cos(u_2-u_3)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2+u_3)$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\cos(2u_2-u_3)\right].$$

[16]. Die vier verschiedenen Elementsysteme, die in diesen Entwickelungen benutzt worden sind, sind die folgenden:

$$\text{I:}\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ u_1,\ u_2,\ u_3.$$

$$\text{II:}\quad \alpha_1,\ \alpha_2;\ u_1,\ u_2 \text{ und}$$

$$\alpha'_3=\alpha_3,\quad u'_3=u_3-\lambda,$$

wo λ die Länge des störenden Körpers in Bezug auf das durch den Schwerpunkt des rotirenden Körpers gelegte feste Koordinatsystem bezeichnet. Die characteristische Funktion H' nimmt hier die Form

$$H'=T-U+\alpha_3\frac{d\lambda}{dt}$$

an.

$$\text{III:}\quad \xi_1=\alpha_2;\qquad \eta_1=u_1+u_2-u'_3,$$

$$\xi_2=\alpha_2-\alpha_1;\quad \eta_2=-u_1,$$

$$\xi_3=\alpha_2+\alpha'_3;\quad \eta_3=u'_3.$$

$$\text{IV:}\quad \xi_1,\ \eta_1 \text{ und}$$

$$u=\sqrt{2\xi_2}\cos\eta_2;\quad p=\sqrt{2\xi_3}\cos\eta_3,$$

$$v=\sqrt{2\xi_2}\sin\eta_2;\quad q=\sqrt{2\xi_3}\sin\eta_3.$$

In den letztgenannten Elementen ausgedrückt, hat man

$$H'=T-U+\left[\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\xi_1\right]\frac{d\lambda}{dt}, \tag{48}$$

$$(49)\quad T = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{k_1}{2C}\left[\xi_1 - \frac{1}{4}(u^2 + v^2)\right]v^2 + \frac{k_2}{2C}\left[\xi_1 - \frac{1}{4}(u^2 + v^2)\right]u^2,$$

$$U = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}[k_1 A \cos^2\alpha + k_2 B \cos^2\beta],$$

wo $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ durch die Formeln (38) und (39) gegeben sind.

[17]. Sind die Trägheitsmomente A und B einander gleich, so ist $k_1 = k_2$, und man hat

$$(50)\qquad U = -\frac{3}{2}(C - A)\frac{\mu}{r^3}\cos^2\gamma.$$



Tryckt den 26 september 1910.

Uppsala 1910. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:o 13.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

WEITERES ÜBER DAS FEHLERGESETZ

VON

C. V. L. CHARLIER

MIT 2 TEXTFIGUREN



UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 13.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

4

Weiteres über das Fehlergesetz.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mit 2 Textfiguren.

Mitgeteilt am 13. November 1907.

Die folgende Mitteilung bildet in der Hauptsache den Inhalt eines Vortrages, den ich in der Vorsammlung der astronomischen Gesellschaft in Jena voriges Jahr gehalten habe. Da der Vortrag nicht geschrieben vorlag, könnte er nicht in den Bericht über die Versammlung aufgenommen werden. Es war meine Absicht die betreffenden Untersuchungen weiter zu führen, bevor ich sie der Öffentlichkeit übergab. Indessen bin ich durch eine in den letzten Monaten geführten Diskussion über die im zweiten Teil des Vortrages behandelte Frage veranlasst, den Vortrag in seiner ursprünglichen Form wiederzugeben.

In den »Meddelanden» N:ris 25, 26 und 27 habe ich, von den LAPLACE'schen Untersuchungen ausgehend, bewiesen, dass die Frequenzkurve für Beobachtungsfehler, *die als eine Summe einer endlichen oder unendlichen Zahl von Elementarfehlern angesehen werden können*, von zwei verschiedenen Typen sind, welche ich die erste *bez.* die zweite Form des Fehlergesetzes genannt habe. Ich will hier die Untersuchung über die zweite Form des Fehlergesetzes in einem Punkt ergänzen.

Um zu dieser zweiten Form zu gelangen, bin ich von der vereinfachenden Voraussetzung ausgegangen, dass bei jeder Fehlerquelle nur zwei Fehler möglich seien: der Fehler Null und der Fehler α. Es zeigt sich dann, dass man zur

folgenden Fehlerfunktion — ψ (z) — geführt wird, aus der die allgemeine Form des Fehlergesetzes in diesem Fall zusammengesetzt werden kann. Es war

$$\psi(z) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi} \int_0^\pi e^{\lambda \cos \omega} \cos [\lambda \sin \omega - z\omega] \, d\omega.$$

Wenn indessen bei den verschiedenen Fehlerquellen sowohl positive wie negative Fehler vorkommen können, was ja im Allgemeinen der Fall sein muss, so ist die obige Hülfsfunktion ψ (z) zur Darstellung des Fehlergesetzes von der zweiten Form nicht hinreichend. Man könnte sich zwar mit zwei verschiedenen Hülfsfunktionen auszuhelfen suchen, die eine für positive, die andere für negative Elementarfehler. Da aber die positiven Fehler bei einer Fehlerquelle sich mit den negativen Fehlern einer anderen Fehlerquelle zusammensetzen, so muss man von vornherein eine solche Hülfsfunktion benutzen, die auf sowohl positive wie negative Elementarfehler Rücksicht nimmt.

Dies geschieht, indem man von folgendem Problem ausgeht:

Bei jeder Fehlerquelle seien drei Fehler möglich: der Fehler Null, der Fehler $+\alpha$ *und der Fehler* $-\alpha$. *Die Wahrscheinlichkeit* — q_i — *des Fehlers* $+\alpha$ *und die Wahrscheinlichkeit* — q'_i — *des Fehlers* $-\alpha$ *seien beide sehr klein, dagegen sei die Wahrscheinlichkeit* — p_i — *des Fehlers Null sehr Nahe der Einheit. Es fragt sich nach der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers* $r\alpha$, *vorausgesetzt dass* Σq_i *und* $\Sigma q'_i$ *beide keine grosse Zahlen sind.*

Durch Betrachtungen ganz ähnlicher Art wie in »Meddelanden» N:o 25 wird man nun zu folgender Hülfsfunktion — $\vartheta(z)$ — geführt

$$\vartheta(z) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi} \int_0^\pi e^{\lambda \cos \omega} \cos [\varkappa \sin \omega - z\omega] \, d\omega.$$

Diese Funktion geht für $\varkappa = \lambda$ in die frühere Hülfsfunktion $\psi(z)$ über.

Indem ich dass nähere Studium dieser Funktion auf eine andere Gelegenheit aufschieben muss, bemerke ich hier, dass

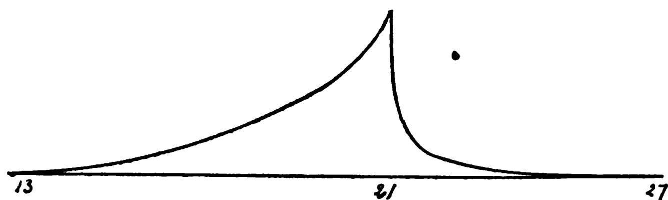
$\psi(z)$ für $z = -1, 2, -3$, u. s. w. verschwindet, wogegen $\vartheta(z)$ für diese z-Werte einen positiven Wert hat. Das Aussehen der Funktion $\vartheta(z)$ für einen kleinen Wert von $\varkappa$ und λ ist aus dem unten stehenden Figur 1 ersichtlich.

In der mir bekannten Literatur war früher nur »einseitige» Frequenzkurven vom Typus B bekannt, so dass ich mich deswegen berechtigt fand anzunehmen, dass bei diesem Typus nur positive (oder nur negative) Elementarfehler vorkamen. Zwar finde ich jetzt, dass einige solchen Kurven, die ich als »einseitige» betrachtete, in der Tat richtiger als vollständige (»zweiseitige») Kurven vom Typus B anzusehen sind. Indessen war es zuerst nach meiner Rückkunft von der Jenaer Versammlung, dass ich auf die tatsächliche Existens solcher Kurven aufmerksam gemacht worden bin, und ich teile hier nachträglich das hierauf bezügliche Beispiel mit. Herr Studiosus BÄNGT WULFF hat am 11, 12 und 16 Juli dieses Jahres (1906) die Randblumen von 1096 Exemplaren von *Matricaria inodora* gezählt und mir gefälligst die erhaltenen Zahlen mitgeteilt. Das Resultat der Zählung war folgendes.

Frequenz-Verteilung der Randblumen von 1096 Exemplaren von Matricaria inodora.

Zahl der Randblumen	Gepflückt am 11/6	Gepflückt am 12/6	Gepflückt am 16/6	Summe
13	—	1	5	6
14	3	2	3	8
15	4	5	12	21
16	14	16	21	51
17	22	22	29	73
18	36	39	39	114
19	61	43	66	170
20	66	81	72	219
21	94	116	149	359
22	21	9	18	48
23	9	5	4	18
24	1	2	—	3
25	—	2	—	2
26	—	2	1	3
27	—	—	1	1
Summe	331	345	420	1096

Die Zählungen sind an der beigefügten Figur 1 graphisch dargestellt.



Frequens-kurve für *Matricaria inodora* nach B. WULFF
Fig. 1.

Offenbar hat man es hier mit einer ausgeprägten Frequenzkurve vom Typus B zu tun, wo sowohl positive wie negative Elementarfehler vorkommen. Die Wert der Parameter $\varkappa$ und λ habe ich noch nicht bestimmt, und kann also vorläufig die Kurve nicht mit der Theorie vergleichen.

Ich will in diesem Zusammenhang bemerken, dass die Deutung, die ich in meinen »Researches into the theory of probability» einer Frequenzkurve für die Randblumen von *Chrysanthemum segetum* gegeben habe, unter Umständen anderes ausfallen kann, wenn man die erhaltene Frequenzkurve als von zwei »zweiseitigen» Frequenzkurven vom Typus B zusammengesetzt betrachtet. Die Frage lässt sich nur durch biologische Untersuchungen entscheiden, wie ich a. a. O. angedeutet habe.

So oft man eine Beobachtungsabweichung (ein Ausdruck der dem Worte Beobachtungs*fehler* wohl vorzuziehen ist) als eine Summe von Elementarfehlern ansehen kann, so muss entweder eine Frequenzkurve vom Typus A oder eine Frequenzkurve vom Typus B entstehen. Wenn aber diese Voraussetzung nicht stattfindet, können Frequenzkurven ganz anderer Art auftreten, ja es lässt sich sogar beweisen, dass Frequenzkurven ganz beliebiger Form, unter geeigneten Voraussetzungen, entstehen können. Zwar lassen sich auch diese *im Allgemeinen* mittelst Reihen, die nach Differentialquotienten *bez.* Differenzen der Hülfsfunktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ (man vergleiche »Meddelanden» N:o 27) fortschreiten, darstellen. Die erhaltenen Darstellungsreihen können aber

eine sehr schwache Konvergenz (und gar keine!) aufweisen, und in vielen Fällen wird es sich dabei nur um eine interpolatorische Darstellung handeln, die einer Wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlage völlig entbehrt.

Als Beispiel von Frequenzkurven dieser Art will ich den folgenden Fall betrachten, der für die Probleme der Stellarastronomie von grundlegender Bedeutung ist.

Es handelt sich um den *Zusammenhang zwischen Parallaxe und der scheinbaren Eigenbewegung der Fixsterne.* Gewöhnlich nimmt man an, dass die Parallaxe — π — und die Eigenbewegung — p — der Fixsterne einander proportional sind. Wollte man indessen in der Formel

$$p = k\pi$$

die Grösse k etwa mit Hülfe der »Methode der kleinsten Quadrate» bestimmen — und viele (unter denen ich selbst) haben eine solche Rechnung ausgeführt — so würde man eine Operation vorhaben, die wenig mit der Theorie der Wahrscheinlichkeiten zu tun hat.

Es bezeichne in der Tat v die wahre absolute Geschwindigkeit eines Fixsterns, θ den Winkel, den die Richtung der Bewegung des Fixsterns mit der Gesichtslinie bildet. Es sei ferner d die Entfernung des Sterns von der Sonne, p die scheinbare eigene Bewegung des Sterns in einem Jahre, π die Parallaxe und endlich ϱ der Radius Vector der Erdbahn, so hat man

$$\sin p = \frac{v \sin \theta}{d}$$

$$\sin \pi = \frac{\varrho}{d}$$

und also

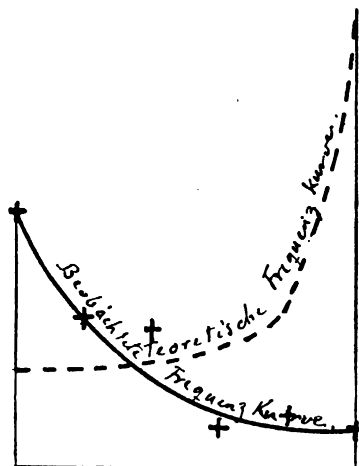
$$\frac{p}{\pi} = \frac{v}{\varrho} \sin \theta$$

Sieht man vorläufig von den Variationen der absoluten Geschwindigkeit der Fixsterne ab, indem man für v die mittlere absolute Geschwindigkeit der Fixsterne einsetzt, so ist er-

sichtlich, dass *das Verhältnis zwischen Eigenbewegung und Parallaxe bei Weitem nicht als eine Konstante bezeichnet werden kann.* Wenn die betrachteten Sterne keinem gemeinsamen System gehören, so kann man annehmen, dass die Werte des Winkels θ genähert gleichförmig zwischen 0° und 360° verteilt sind. Lässt man beispielsweise θ um Intervalle von zehn Bogenminuten von 0° bis 90° wachsen, so liegen von den erhaltenen 540 Werten von sin θ

35	Werte	zwischen	0,0	und	0,1
35	»	»	0,1	»	0.2
35	»	»	0,2	»	0,3
37	»	»	0,3	»	0,4
38	»	»	0,4	»	0,5
42	»	»	0,5	»	0,6
45	»	»	0,6	»	0,7
52	»	»	0,7	»	0,8
66	»	»	0,8	»	0,9
155	»	»	0,9	»	1,0

Sind für eine Zahl von Sternen die Parallaxe und die Eigenbewegungen bestimmt, so folgt hieraus, dass — *von den Beobachtungsfehlern abgesehen* — das Verhältnis zwischen p und π eine solche Frequenzkurve aufweisen muss, wie die in Fig. 2 als theoretische Frequenzkurve bezeichnete.



Parallax und eigene Bewegung.

Fig. 2.

Aus einer (grösseren) Zahl von Bestimmungen von p und π lässt sich in dieser Weise die mittlere Geschwindigkeit $v:\varrho$ der Fixsterne ableiten, und zwar *erhält man diesen Wert nicht indem man etwa den mittleren Wert der erhaltenen Werte von $p:\pi$ aufsucht, sondern indem man den Maximalwert bestimmt.*

$$\frac{v}{\varrho} = \text{Max}\left(\frac{p}{\pi}\right)$$

Um zu beurteilen wie das bis jetzt vorhandene ziemlich spärliche Beobachtungsmaterial (für p und π) mit den obigen Auseinandersetzungen in Einklang steht, habe ich die von NEWCOMB in seinem Buch »The Stars, a study of the universe» gegebene Zusammenstellung benutzt. Von den in seiner Liste vorkommenden Sternen wurden diejenigen ausgeschlossen, bei denen der erhaltene Wert der Parallaxe unter $0'',06$ (um den Einfluss der Beobachtungsfehler möglichst zu verringern) liegt und ausserdem diejenigen, deren Parallaxe von NEWCOMB als »entirely unreliable» bezeichnet wird. Ich habe noch Sterne mit einer Parallaxe von $0'',06$ ausgeschlossen, wenn sie von NEWCOMB bezeichnet wird als »subject to more doubt than usual». Es erübrigt in dieser Weise 51 Sterne, für welche ich aus NEWCOMBS Werte für $\Delta\delta$ und $\Delta\alpha$ die Werte von p ableitete. Die somit erhaltene Liste ist die folgende

Stern	p	π	$p:\pi$	Stern	p	π	$p:\pi$
β Cassiop.	0″,56	0″,15	3,7	ε Urs. maj	0″,51	0″,13	4,0
Gr. 34	2,88	0,30	9,6	10 Urs maj.	0,51	0,20	2,6
ζ Tucani	2,06	0,06	34,3	Fed. 1457—8	1,70	0,15	11,3
β Hydri	2,23	0,13	17,1	θ Urs. maj.	1,09	0,07	15,6
η Cassiop.	1,26	0,20	6,3	Ll 19022	0,80	0,06	13.3
μ Cassiop.	3,75	0,14	26,8	20 Leo min.	0,69	0,06	11,5
Polaris	0,04	0,06	0,7	Gr. 1618	1,46	0,18	8,1
τ Ceti	1,93	0,31	6,2	Gr. 1646	0,90	0,10	9,0
ε Eridani	3,16	0,14	22,6	Ll 21185	4,77	0,46	10,4
o^2 Eridani	4,03	0,18	22,4	Ll 21258	4,45	0,22	20,2
Aldebaran	0,20	0,11	1,8	Fed. 1831	0,44	0,15	3,0
Capella	0,44	0,09	4,9	O. A. 11677	3,04	0,27	11,3
ψ^5 Aurigae	0,16	0,11	1,5	Gr. 1855	0,34	0,06	5,7
Sirius	1,32	0,37	3,6	Ll 22954	1,01	0,14	7,2
Castor	0,20	0,20	1,0	β Comae	1,19	0,11	10,8
Procyon	1,25	0,30	4,1	β Centauri	0″,04	0,05	0,8
Pollux	0,62	0,06	10,3	α Centauri	3,67	0,75	4,9

Stern	p	π	$p:\pi$	Stern	p	π	$p:\pi$
Fed. 2544	1″,09	0″,08	13,6	31 Aquilae	0″,96	0″,06	16,0
η Herculis	0,10	0,40	0,2	σ Draconis	1,84	0,26	7,1
π Herculis	0,01	0,11	0,1	α Aquilae	0,65	0,23	2,8
γ^1 Draconis	0,17	0,32	0,5	61 Cygni	5,24	0,39	13,4
O.A. 17415	1,30	0,22	5,9	ε Indi	4,67	0,20	23,4
70 Ophiuchi	1,15	0,19	6,0	Fomalhaut	0,37	0,13	2,8
α Lyrae	0,35	0,11	3,2	Lac. 9352	7,00	0,28	25,0
Anon.	2,29	0,35	6.5	Brad. 3077	2,10	0,15	14,0
				85 Pegasi	1,29	0,05	25,8

Die Werte von $p:\pi$ verteilen sich in folgender Weise:

Zwischen	0	und	5	fallen	19	Werte
»	5	»	10	»	11	»
»	10	»	15	»	10	»
»	15	»	20	»	3	»
»	20	»	25	»	4	»
»	25	»	30	»	3	»
Grösser als			30	ist	1	Wert

Die entsprechende Frequenzkurve ist aus der Fig. 2 ersichtlich.

Die Abweichung von der theoretischen Frequenzkurve ist, wie man sieht, eine sehr bedeutende. Indessen muss man darauf Acht nehmen, erstens dass das Material sehr klein ist, zweitens dass die beobachteten Sterne nicht willkürlich gewählt sind, sondern vorzugsweise Sterne mit grosser Eigenbewegung gewählt sind und dass ausserdem Sterne mit kleiner Parallaxe ganz ausgeschlossen worden sind. Hierzu kommt noch, dass der Einfluss der Beobachtungsfehler ausser Acht gelassen worden ist. Indessen sieht man, dass die beiden Kurven die Eigenschaft gemeinsam haben gegen die x-Achse konvex zu sein; ausserdem sind sie zu beiden Seiten hin abgegrenzt. Die obere Grenze von $p:\pi$ scheint ungefähr bei 30 zu liegen. Oberhalb dieser Grenze kommt nur ein einziger Fall vor, nämlich der Stern ζ Tucani, dessen Parallaxe zwar nach NEWCOMB als gut zu betrachten ist, aber nur den Wert 0,″06 besitzt, so dass ein sehr kleiner Fehler in π einen beträchtlichen Einfluss auf den Wert von $p:\pi$ ausübt.

Wir können also annähernd

$$v = 30\,\varrho$$

setzen, so dass also *die mittlere Geschwindigkeit der Fixsterne in einem Jahre 30 Erdbahnhalbmesser betragen würde.*

Abgesehen davon, dass das hier benutzte statistische Material sehr klein ist und das Resultat schon aus diesem Grund unsicher sein muss, sprechen verschiedene Umstände dafür, dass der obige Wert für v zu gross ist. Schon die Vernachlässigung der Bewegung des Sonnensystems wirkt in dieser Richtung. Bei einer strengeren Behandlung muss auch der Einfluss der Beobachtungsfehler in Betracht gezogen werden. Anderseits scheint mir doch das Resultat schwerlich mit dem Werte von NEWCOMB (KAPTEYN) $v = 7.4\ \varrho$ vereinbar zu sein (Vergl. NEWCOMB: The Stars S. 304).

In the »Monthly Notices» hat Miss GIBSON eine statistische Studie über das Fixsternsystem vorgenommen und dabei für den Korrelationskoefficienten zwischen eigener Bewegung und Parallaxe den 0.44 Wert gefunden. Diese schwache Korrelation zwischen zwei Grössen, die man gewöhnlich als sehr nahe mit einander verbunden annimmt, hat mich zuerst stutzig gemacht, und war die Veranlassung zu dieser Untersuchung. Es ist aber, wie man aus dem Vorigen findet, sehr natürlich, dass der Korrelationskoefficient bedeutend kleiner als Eins ausfallen muss. Der theoretische Wert dieses Koefficienten ist 0,637 (= dem Mittelwert von $\sin\theta$ also $2:\pi$). Die Beobachtungsfehler und die Beschaffenheit des statistischen Materials geben zu einem noch kleineren Wert für den Korrelationskoefficienten Veranlassung.



Tryckt den 8 februari 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:O 20.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

ÜBER DIE BEWEGUNG EINES KLEINEN PLANETEN IN DER NÄHE DER LAGRANGE'SCHEN DREIECKSPUNKTE

VON

F. J. LINDERS



UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 20.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 35

Über die Bewegung eines kleinen Planeten in der Nähe der Lagrange'schen Dreieckspunkte.

Von

F. J. LINDERS.

Mitgeteilt am 12. Februar 1908 durch K. BOHLIN und C. V. L. CHARLIER.

Einleitung.

Im asteroidischen Dreikörperprobleme existieren bekanntlich sieben singuläre Punkte: die beiden endlichen Massen (wie wollen im folgenden die Sonne und Jupiter annehmen) und die fünf GYLDÉN'schen Librationszentra, von denen drei auf der Verbindungslinie der beiden Massen liegen und zwei mit ihnen ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die zwei letzteren Librationszentra sind vom grössten Interesse, weil nach den Untersuchungen von CHARLIER u. A. die Bewegung eines kleinen Planeten in der Nähe dieser Punkte *stabil* ist. Die mittlere Bewegung des Asteroiden ist folglich immer genähert gleich der Jupiters, und der Unterschied ihrer mittleren Längen schwankt um einen Mittelwert von $\pm 60°$ herum. Durch die Entdeckung von bisher drei kleinen Planeten, 1906 T. G., 1906 V. Y. und 1907 X. M., in der Nähe dieser »Dreieckspunkte» haben die obenerwähnten Untersuchungen ein grosses praktisches Interesse gewonnen. Im folgenden werden die Jupiterstörungen dieser neuen Asteroidengruppe untersucht werden.

Die Librationspunkte, von welchen hier die Rede ist, bezeichnen wir nach CHARLIER mit L_5 und L_4: L_5 geht Jupiter 60° voraus, L_4 folgt in derselben Entfernung. In der

»Mechanik des Himmels»[1] Abschnitt IX § 4 ist die Bewegung um diese Punkte durch genäherte Ausdrücke der rechtwinkligen Koordinaten des Planeten als Funktionen der Zeit dargestellt. Der Anfangspunkt der Koordinaten ist in einem der Librationspunkte gelegt, und die Abszissenachse der Linie Jupiter-Sonne parallel. Der Verfasser der M. d. H. hat sich Entwickelungen nach dem Abstande des Asteroiden vom Librationspunkte bedient und dabei auf die erste Potenz dieses Abstandes und auf die Bewegung in zwei Dimensionen beschränkt. Man erhält folglich nur dann eine gute Annäherung der *Koordinaten*störungen des Planeten, wenn die Entfernung vom Librationspunkte im Verhältnis zur Längeneinheit, hier die halbe grosse Achse der Jupiterbahn, als eine kleine Grösse betrachtet werden kann. Dies ist bei den oben erwähnten Planeten wenigstens augenblicklich nicht der Fall; übrigens sind auch die Neigungen gegen die Jupiterbahn ziemlich gross. Es empfiehlt sich aus diesem Grunde die *Elementen*störungen zu untersuchen, und ich werde in diesem Aufsatze die erste Annäherung zur Berechnung derselben geben.

Im Abschnitt I wird eine allgemeine Methode skizziert, um, mit einer periodischen Lösung der Differentialgleichungen als Ausgangspunkt, aus den oskulierenden Elementen genäherte Jupiterstörungen abzuleiten. Im Abschnitt II wird eine numerische Anwendung auf den zuerst entdeckten Planeten dieser Gruppe — 1906 T. G. — gegeben.

I.

Ableitung genäherter Ausdrücke der Jupiterstörungen eines kleinen Planeten in der Nähe von L_5 oder L_4.

1. Die Differentialgleichungen des Problems.

Wir beziehen die Bewegung des Asteroiden auf ein rechtwinkliges bewegliches Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften:

1:o) Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt in der Sonne, die xy-Ebene ist die Bahnebene Jupiters.

2:o) Die positive x-Achse fällt mit dem Radius Vector Jupiters zusammen, wenn seine Länge $= 0$ ist.

[1] Im folgenden kurz als M. d. H. zitiert.

3:o) Die positive y-Achse geht der positiven x-Achse 90° voraus in der Richtung der Bewegung.

4:o) Die positive z-Achse ist nördlich von der xy-Ebene gerichtet.

Weiter führen wir folgende Bezeichnungen ein:

1:o) q_1, q_2, q_3 sind die rechtwinkligen Koordinaten des Asteroiden, q_4, q_5 diejenigen Jupiters.

2:o) r und $\varDelta$ sind die Entfernungen Asteroid — Sonne und Asteroid — Jupiter.

3:o) 1 und μ sind die Massen der Sonne und Jupiters.

Der Vereinfachung des Problems wegen nehmen wir vorläufig an:

1:o) Die Sonne und Jupiter bewegen sich in Kreisen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

2:o) Die Zeitenheit ist die kanonische, folglich die Attraktionskonstante $= 1$ und die mittlere Bewegung Jupiters $= \sqrt{1+\mu} = n'$.

3:o) Die Zeit wird so bestimmt, dass die Länge Jupiters $= 0$ ist, wenn $t = 0$.

Wenn wir DELAUNAY's Elemente benutzen, ist die Bewegung des Asteroiden von folgenden wohlbekannten Gleichungen dargestellt:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial l}; & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial L}; \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g}; & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial G}; \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial h}; & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial H}; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Phi = \frac{1}{2L^2} + \frac{\mu}{\varDelta} - \mu\,(q_1 \cos n't + q_2 \sin n't).$$

Die Veränderlichen in (1) sind, durch oskulierende elliptische Elemente ausgedrückt:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a}; & l &= M = \text{mittlere Anomalie}; \\ G &= \sqrt{a(1-e^2)}; & g &= \pi - \Omega; \\ H &= G \cos i; & h &= \Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Um die Zeit, die nur im letzten Gliede von Φ vorhanden ist, wegzuschaffen, ändert CHARLIER (M. d. H. IX § 13) ein wenig die Veränderlichen (2):

$$\begin{aligned} x_1' &= L\,;\; y_1' = l\,; \\ x_2' &= G\,;\; y_2' = g\,; \\ x_3' &= H\,;\; y_3' = \Omega - n' t\,; \end{aligned} \tag{3}$$

weshalb gleichzeitig die charakteristische Funktion geändert werden muss:

$$\Phi' = \Phi + n' H. \tag{3*}$$

Man kann indessen beweisen, dass

$$q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t = A' \xi + B' \eta \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wo

$$\begin{aligned} \xi &= a (\cos E - e)\,; \\ \eta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E\,; \end{aligned} \tag{4*}$$

A' und B' sind Funktionen der Veränderlichen (3), und zwar:

$$\begin{aligned} A' &= \cos y'_2 \cos y'_3 - \sin y'_2 \sin y'_3 \frac{x'_3}{x'_2}\,; \\ B' &= \sin y'_2 \cos y'_3 - \cos y'_2 \sin y'_3 \frac{x'_3}{x'_2}\,. \end{aligned} \tag{4**}$$

Die Bewegungsgleichungen sind also jetzt:

$$\frac{d x'_i}{dt} = \frac{\partial \Phi'}{\partial y'_i}; \quad \frac{d y'_i}{dt} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_i} \; (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

wo

$$\Phi' = \frac{1}{2 x'^2} + n' x'_3 + \mu \left[\frac{1}{\Delta} - (q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t) \right].$$

Im letzten Gliede ist (4) eingesetzt zu denken.

Im Obigen haben wir tacite die mittlere Bewegung des kleinen Planeten gleich Eins gesetzt. Es zeigt sich indessen, dass man dann die partikularen Lösungen unserer Differentialgleichungen, die den LAGRANGE'schen Dreieckspunkten entsprechen, nicht erhält, sondern man muss von $n = n' = \sqrt{1 + \mu}$

ausgehen. Folglich muss die intermediäre Bahn ein wenig geändert werden, und zwar durch Einführung des Gliedes $\frac{\mu}{r}$. Wenn also die Störungsfunktion folgenderweise geschrieben wird:

$$\Phi' = \Phi'_0 + \mu \, . \, \Phi'_1 ;$$

so ist

$$\Phi'_1 = -\frac{1}{r} + \frac{1}{\Delta} - (q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t) . \tag{6}$$

Wir führen nun Veränderliche ein, die für die Entwickelung der Störungsfunktion vorteilhafter sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 ; & y_1 &= y'_1 + y'_2 + y'_3 ; \\ x_2 &= x'_1 - x'_2 ; & y_2 &= -y'_2 - y'_3 ; \\ x_3 &= x'_2 - x'_3 ; & y_3 &= -y'_3 . \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Veränderlichen sind kanonisch, was z. B. daraus folgt, dass POINCARÉ's Kriterium $\Sigma x_1 y_1 = \Sigma x'_1 y'_1$ befriedigt ist. Die Bewegungsgleichungen sind nun:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} ; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} ; \; (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Die charakteristische Funktion F wird unten gegeben.

Die Veränderlichen x_i, y_i sind mit den oskulierenden elliptischen Elementen durch folgende Relationen verbunden:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a} ; & y_1 &= M + \pi - n't = \lambda - \lambda' ; \\ x_2 &= \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) = 2 \sqrt{a} \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi ; & y_2 &= -\pi + n't = -\pi + \lambda' ; \\ x_3 &= \sqrt{a(1 - e^2)}\,(1 - \cos I) = 2 \sqrt{a} \cos \varphi \sin^2 \tfrac{1}{2} I ; & y_3 &= -\Omega + n't = -\Omega + \lambda' . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Entwickelung der Störungsfunktion. Einführung der Poincaré'schen Veränderlichen.

In der Entwickelung von F nach Potenzen der Jupitermasse beschränken wir uns auf die erste Potenz, so dass

$$F = F_0 + \mu \, . \, F_1 ; \tag{10}$$

wo

$$F_0 = \frac{n'}{2x_1^2} + n'(x_1 - x_2 - x_3); \tag{11}$$

$$F_1 = -\frac{1}{r} + \frac{1}{\varDelta} - (q_1 \cos n't + q_2 \sin n't). \tag{11*}$$

In (11*) sind die Veränderlichen (7) einzuführen.

Für einen kleinen Planeten in der Nähe von L_5 oder L_4 ist $\varDelta$ nahe $= 1$; wir setzen daher

$$\varDelta^2 = 1 + \varrho;$$

wo ϱ eine kleine Grösse ist. In der Entwickelung nehmen wir die zweite Potenz von ϱ mit.

Aus dem Dreieck Jupiter—Sonne—Librationspunkt bekommen wir:

$$\varDelta^2 = r^2 + 1 - 2(q_1 \cos n't + q_2 \sin n't);$$

folglich

$$\varrho = r^2 - 2(q_1 \cos n't + q_2 \sin n't); \tag{12}$$

und

$$\frac{1}{\varDelta} = 1 - \frac{1}{2}\varrho + \frac{3}{8}\varrho^2 = 1 - \frac{r^2}{2} + (q_1 \cos n't + q_2 \sin n't) + \frac{3}{8}\varrho^2;$$

so dass

$$F_1 = 1 - \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{r}\right) + \frac{3}{8}\varrho^2.$$

Es sind nun die nächsten Aufgaben, die Entwickelungen von $[q_1 \cos n't + q_2 \sin n't]$, $r, \frac{1}{r}$ und ϱ auszuführen.

Nach (4) ist

$$[q_1 \cos n't + q_2 \sin n't] = A'\xi + B'\eta;$$

Wenn wir 7 in (4**) einsetzen, bekommen wir für A' und B' folgende Ausdrücke:

$$A' = \cos(y_2 + y_3)\cos y_3 + \sin(y_2 + y_3)\sin y_3, \frac{x_1 - x_2 - x_3}{x_1 - x_2};$$

$$B' = \sin(y_2 + y_3)\cos y_3 - \cos(y_2 + y_3)\sin y_3, \frac{x_1 - x_2 - x_3}{x_1 - x_2};$$

Die Grenze der Entwickelung stellen wir nun mit Beschränkung auf Glieder des zweiten Grades der Exzentrizität und der Neigung fest. Die Quotienten $\frac{x_2}{x_1}$ und $\frac{x_3}{x_1}$ sind offenbar Glieder vom zweiten Grade, weshalb wir A' und B' schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \cos y_2 - \sin(y_2 + y_3) \sin y_3 \frac{x_3}{x_1}; \\ B' &= \sin y_2 + \cos(y_2 + y_3) \sin y_3 \frac{x_3}{x_1}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ξ und η werden durch (4*) bestimmt. Wir führen indessen statt die exzentrische Anomalie die mittlere ein. Aus der KEPLER'schen Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

leiten wir die bekannten Reihenentwickelungen ab:

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M);$$

$$\sin E = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{8}(3 \sin 3M - \sin M);$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &= \cos(y_1 + y_2) - \frac{3}{2} e - \frac{e}{2} \cos 2(y_1 + y_2) - \frac{3}{8} e^2 \cos(y_1 + y_2) + \frac{3}{8} e^2 \cos 3(y_1 + y_2); \\ &= \sin(y_1 + y_2) \qquad + \frac{e}{2} \sin 2(y_1 + y_2) - \frac{5}{8} e^2 \sin(y_1 + y_2) + \frac{3}{8} e^2 \sin 3(y_1 + y_2); \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

aus (13) und (14) folgt:

$$\left.\begin{aligned} [q_1 \cos n't + q_2 \sin n't] = x_1^2 \Big[& \Big(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \frac{x_3}{x_1}\Big) \cos y_1 - \\ & - \frac{3}{2} e \cos y_2 + \frac{e}{2} \cos(2 y_1 + y_2) + \frac{1}{8} e^2 \cos(y_1 + 2 y_2) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{x_3}{x_1} \cos(y_1 + 2 y_3) + \frac{3}{8} e^2 \cos(3 y_1 + 2 y_2) \Big]. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Wir werden nun r, r^2 und $\frac{1}{r}$ entwickeln.

Der Radius vector r kann bekanntlich in eine Fourierscher Reihe nach Kosinen von Vielfachen der mittleren Anomalie entwickelt werden, in welcher Reihe die Koeffizienten Differenzen von BESSEL'schen Funktionen der Exzentrizität sind. In der That ist

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2 M \ldots$$

wovon wir leicht bekommen

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + e^2 - 2 e \cos M + e^2 \sin^2 M \ldots$$

und

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2 M \ldots$$

folglich in unseren Veränderlichen:

$$\left.\begin{aligned} r &= x_1^2 \left[1 + \frac{e^2}{2} - e \cos (y_1 + y_2) - \frac{e^2}{2} \cos 2 (y_1 + y_2)\right]; \\ r^2 &= x_1^4 \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - 2 e \cos (y_1 + y_2) - \frac{e^2}{2} \cos 2 (y_1 + y_2)\right]; \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{x_1^2} \left[1 + e \cos (y_1 + y_2) + e^2 \cos 2 (y_1 + y_2)\right]. \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

Übrig ist ϱ^2 zu entwickeln.

Aus (12) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{8} \varrho^2 = \frac{3}{8} r^4 + \frac{3}{2} [q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t]^2 - \\ - \frac{3}{2} r^2 [q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t]; \end{aligned}\right\}$$

und durch Einsetzen von (16) und von (15) wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{8} \varrho^2 = \frac{3}{8} x_1^8 [1 + 5 e^2 - 4 e \cos (y_1 + y_2) + e^2 \cos 2 (y_1 + y_2)] + \\ + \frac{3}{2} x_1^4 \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{4} e^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2\right) \cos 2 y_1 + \frac{5}{4} e^2 \cos 2 y_2 + \right. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\frac{x_3}{x_1}\cos 2y_3-\frac{3}{2}e\cos(y_1-y_2)-e\cos(y_1+y_2)-\\
&-\frac{1}{4}e^2\cos 2(y_1+y_2)+\frac{e}{2}\cos(3y_1+y_2)+\frac{1}{2}e^2\cos(4y_1+2y_2)\Big]\\
&-\frac{3}{2}x_1^6\Big[\Big(1+2e^2-\frac{1}{2}\frac{x_3}{x_1}\Big)\cos y_1-\frac{5}{2}e\cos y_2+\\
&\qquad\qquad+\frac{11}{8}e^2\cos(y_1+2y_2)-\frac{e}{2}\cos(2y_1+y_2)+\\
&+\frac{1}{2}\frac{x_3}{x_1}\cos(y_1+2y_3)-\frac{3}{8}e^2\cos(3y_1+2y_2)\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

In den abgeleiteten Entwickelungen (15), (16) und (17) führen wir durch eine POINCARÉ'sche Transformation folgende Veränderlichen ein:

$$\begin{aligned}
\xi_2&=\sqrt{2x_2}\cos y_2;\\
\eta_2&=\sqrt{2x_2}\sin y_2;\\
\xi_3&=\sqrt{2x_3}\cos y_3;\\
\eta_3&=\sqrt{2x_3}\sin y_3;
\end{aligned}\qquad(18)$$

welche Veränderlichen bekanntlich auch kanonisch sind.

Mit unserer Annäherung ist

$$\begin{aligned}
e^2&=\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{x_1};\\
e\cos y_2&=\frac{1}{\sqrt{x_1}}\cdot\xi_2;\\
e\sin y_2&=\frac{1}{\sqrt{x_1}}\cdot\eta_2;\\
e^2\cos 2y_2&=\frac{\xi_2^2-\eta_2^2}{x_1};\\
e^2\sin 2y_2&=\frac{2\xi_2\eta_2}{x_1}.
\end{aligned}\qquad(18^*)$$

Ähnliche Relationen bestehen zwischen e_1, y_3 und x_1, ξ_3, η_3.

Für die Störungsfunktion bekommen wir dann folgende Entwickelung bis zur zweiten Potenz der Exzentrizität und der Neigung:

$$F = F_0 + \mu \cdot F_1 ;$$

$$F_0 = \frac{n'}{2x_1^2} + n' x_1 - \frac{n'}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \frac{n'}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2) ; \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_1 = & \left[1 + \frac{3}{8}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{x_1^2}\right] + \left[\frac{15}{4}x_1^{\frac{11}{2}}\xi_2 + \left(\frac{15}{8}x_1^7 + 3x_1^3\right)\xi_2^2 + \right.\\
& \left. + \left(\frac{15}{8}x_1^7 - \frac{3}{4}x_1^3\right)\eta_2^2 + \frac{3}{8}x_1^3\xi_3^2 - \frac{3}{8}x_1^3\eta_3^2\right] + \\
& + \left[-\frac{3}{2}x_1^6 + \frac{3}{4}x_1^5 x_3 - \left(\frac{3}{2}x_1^{\frac{15}{2}} + \frac{11}{4}x_1^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{x_1^{\frac{5}{2}}}\right)\xi_2 - \right.\\
& \left. - \frac{81}{16}x_1^5\xi_2^2 - \frac{15}{16}x_1^5\eta_2^2 - \frac{3}{8}x_1^5\xi_3^2 + \frac{3}{8}x_1^5\eta_3^2\right]\cos y_1 + \\
& + \left[\left(\frac{3}{2}x_1^{\frac{15}{2}} - \frac{7}{4}x_1^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{x_1^{\frac{5}{2}}}\right)\eta_2 + \frac{33}{8}x_1^5\xi_2\eta_2 + \right.\\
& \left. + \frac{3}{4}x_1^5\xi_3\eta_3\right]\sin y_1 + \left[\frac{3}{4}x_1^4 + \frac{3}{4}x_1^{\frac{11}{2}}\xi_2 + \right.\\
& \left. + \left(\frac{3}{8}x_1^7 - \frac{5}{4}x_1^3 - \frac{1}{x_1^3}\right)\xi_2^2 + \left(-\frac{3}{8}x_1^7 - x_1^3 + \frac{1}{x_1^3}\right)\eta_2^2\right]\cos 2y_1 + \\
& + \left[-\frac{3}{4}x_1^{\frac{11}{2}}\eta_2 + \left(-\frac{3}{4}x_1^7 + \frac{1}{4}x_1^3 + \frac{2}{x_1^3}\right)\xi_2\eta_2\right]\sin 2y_1 + \\
& + \left[\frac{3}{4}x_1^{\frac{7}{2}}\xi_2 + \frac{9}{16}x_1^5\xi_2^2 - \frac{9}{16}\eta_2^2\right]\cos 3y_1 + \\
& + \left[-\frac{3}{4}x_1^{\frac{7}{2}}\eta_2 - \frac{9}{8}x_1^5\xi_2\eta_2\right]\sin 3y_1 + \\
& + \left[\frac{3}{4}x_1^3\xi_2^2 - \frac{3}{4}x_1^3\eta_2^2\right]\cos 4y_1 + \\
& + \left[-\frac{3}{2}x_1^3\xi_2\eta_2\right]\sin 4y_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

In diesen Entwickelungen ist der Grad der Glieder in Bezug auf die Exzentrizität und die Neigung durch die Exponenten von ξ_2, η_2 und ξ_3, η_3 angegeben; x_1 ist von der Ordnung 0.

3. Lösung der Differentialgleichungen des Problems.

Die Differentialgleichungen der Bewegung haben nun folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_1}; & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1}; \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_2}; & \frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_2}; \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_3}; & \frac{d\eta_3}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Aus der Entwickelung von F ist ersichtlich, dass (21) folgende partikulare, periodische Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; & y_1 &= \pm 60^\circ; \\ \xi_2 &= 0; & \eta_2 &= 0; \\ \xi_3 &= 0; & \eta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Hier wie im Folgenden entspricht des + Zeichen dem Librationspunkt L_5, das — Zeichen L_4.

Um die allgemeine Lösung der Gleichungen (21) zu erhalten, wollen wir die partikulare Lösung (22) variieren. Wir setzen also:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \delta x_1; & y_1 &= \pm 60^\circ + \delta y_1; \\ \xi_2 &= \delta \xi_2; & \eta_2 &= \delta \eta_2; \\ \xi_3 &= \delta \xi_3; & \eta_3 &= \delta \eta_3; \end{aligned} \tag{23}$$

wo wir δx_1, δy_1, $\delta \xi_2$, $\delta \eta_2$, $\delta \xi_3$, $\delta \eta_3$ als kleine Grössen ansehen. Wir bilden (vgl. POINCARÉ, Meth. nouv. I p. 162) folgende Variationsgleichungen:

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{d}{dt}\delta x_1 = +F_{21}\delta x & +F_{22}\delta y_1 & +F_{23}\delta\xi_2 & +F_{24}\delta\eta_2 & +F_{25}\delta\xi_3 & +F_{26}\delta\eta_3; \\
\frac{d}{dt}\delta y_1 = -F_{11} & -F_{12} & -F_{13} & -F_{14} & -F_{15} & -F_{16} & ; \\
\frac{d}{dt}\delta\xi_2 = +F_{41} & +F_{42} & +F_{43} & +F_{44} & +F_{45} & +F_{46} & ; \\
\frac{d}{dt}\delta\eta_2 = -F_{31} & -F_{32} & -F_{33} & -F_{34} & -F_{35} & -F_{36} & ; \\
\frac{d}{dt}\delta\xi_3 = +F_{61} & +F_{62} & +F_{63} & +F_{64} & +F_{65} & +F_{66} & ; \\
\frac{d}{dt}\delta\eta_3 = -F_{51} & -F_{52} & -F_{53} & -F_{54} & -F_{55} & -F_{56} & .
\end{array} \qquad (24)$$

Die Koeffizienten der rechten Seite sind konstante Grössen, und zwar die Werte der zweiten Derivierten der Störungsfunktion in den Librationspunkten L_5 und L_4. Die Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 entsprechen in der Ordnung x_1, y_1, ξ_2, η_2, ξ_3, η_3; z. B. ist $F_{23} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial \xi_2}$ u. s. w. Ferner ist $F_{ij} = F_{ji}$ $(i = 1, \ldots, 6)$.

Wir setzen eine Lösung dieser linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten von folgender Form an:

$$\delta x_1 = A' e^{\lambda t};\ \delta y_1 = B' e^{\lambda t};\ \delta\xi_2 = C' e^{\lambda t};\ \delta\eta_2 = D' e^{\lambda t};\ \delta\xi_3 = E' e^{\lambda t};\ \delta\eta_3 = F' e^{\lambda t};$$

wo λ eine später zu bestimmende Grösse ist und A', B', C', D', E', F' Integrationskonstanten sind. Durch Substitution in (24) bekommen wir für die Bestimmung von λ folgende *Fundamentalgleichung:*

$$0 = \psi(\lambda) = \begin{vmatrix}
-\lambda + F_{21}, & +F_{22}, & +F_{23}, & +F_{24}, & +F_{25}, & +F_{26} \\
-F_{11}, & -\lambda - F_{12}, & -F_{13}, & -F_{14}, & -F_{15}, & -F_{16} \\
+F_{41}, & +F_{42}, & -\lambda + F_{43}, & +F_{44}, & +F_{45}, & +F_{46} \\
-F_{31}, & -F_{32}, & -F_{33}, & -\lambda - F_{34}, & -F_{35}, & -F_{36} \\
+F_{61}, & +F_{62}, & +F_{63}, & +F_{64}, & -\lambda + F_{65}, & +F_{66} \\
-F_{51}, & -F_{52}, & -F_{53}, & -F_{54}, & -F_{55}, & -\lambda - F_{56}
\end{vmatrix} \quad (2$$

Um $\psi(\lambda)=0$ zu lösen, müssen wir die F_{ij} berechnen. In den Ausdrücken der zweiten Ableitungen der Störungsfunktion, die aus den Entwickelungen (19) und (20) erhalten werden, hat man $x_1=1$; $y_1=\pm 60°$; $\xi_2=\eta_2=\xi_3=\eta_3=0$ zu setzen. Wir bekommen dann:

$$\begin{array}{lll}
F_{11}= 3n'-9\mu; & F_{12}= \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mu; & F_{13}=\frac{27}{4}\mu; \\
F_{14}= \mp\frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mu; & F_{15}=0; & F_{16}=0; \\
F_{22}= \frac{9}{4}\mu; & F_{23}= \pm\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\mu; & F_{24}=\frac{27}{8}\mu; \\
F_{25}=0; & F_{26}=0; & F_{33}=-n'+\frac{63}{16}\mu; \\
F_{34}= \pm\frac{57}{16}\sqrt{3}\,\mu; & F_{35}=0; & F_{36}=0; \\
F_{44}=-n'+\frac{45}{16}\mu; & F_{45}=0; & F_{46}=0; \\
F_{55}=-n'+\frac{3}{4}\mu; & F_{56}= \pm\frac{3}{8}\sqrt{3}\,\mu; & F_{66}=0;
\end{array} \tag{26}$$

$$F_{ij}=F_{ji};\ n'=\sqrt{1+\mu}=1+\frac{1}{2}\mu.$$

Aus (26) geht hervor, dass $\psi(\lambda)$ als ein Produkt zweier Determinanten $\psi_1(\lambda)$ und $\psi_2(\lambda)$ geschrieben werden kann; $\psi_1(\lambda)$ ist eine vierfache, $\psi_2(\lambda)$ eine doppelte Determinante. Das System (24) zerfällt folglich in zwei:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\delta x_1 &= F_{21}\,\delta x_1 + F_{22}\,\delta y_1 + F_{23}\,\delta\xi_2 + F_{24}\,\delta\eta_2; \\
\frac{d}{dt}\delta y_1 &= -F_{11} \quad -F_{12} \quad -F_{13} \quad -F_{14} \quad ; \\
\frac{d}{dt}\delta\xi_2 &= F_{41} \quad +F_{42} \quad +F_{43} \quad +F_{44} \quad ; \\
\frac{d}{dt}\delta\eta_2 &= -F_{31} \quad -F_{32} \quad -F_{33} \quad -F_{34} \quad ;
\end{aligned} \tag{27}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta\xi_3 &= \quad F_{56}\,\delta\xi_3 + F_{66}\,\delta\eta_3; \\ \frac{d}{dt}\delta\eta_3 &= - F_{55} \qquad - F_{56} \qquad ; \end{aligned} \tag{28}$$

(27) sind die Variationsgleichungen bei Beschränkung des Problems auf zwei Dimensionen; (28) enthalten die Grössen, die Funktionen der Neigung sind.

Wir behandeln zuerst (27), deren Lösung von folgender Determinante abhängig ist:

$$0 = \psi_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda + F_{12}, & + F_{22}, & + F_{23}, & + F_{24} \\ - F_{11}, & -\lambda - F_{12}, & - F_{13}, & - F_{14} \\ + F_{14}, & + F_{24}, & -\lambda + F_{34}, & + F_{44} \\ - F_{13}, & - F_{23}, & - F_{33}, & -\lambda - F_{34} \end{vmatrix} \tag{29}$$

Wenn anfänglich Grössen, die mit μ^2 multipliziert sind, vernachlässigt werden, kommt in (29) nur das Diagonalglied in Betracht. Für die Bestimmung von λ bekommen wir also aus (29) und (26) folgende Gleichung:

$$0 = \lambda^4 + \lambda^2 (1 + \mu) + \frac{27}{4}\mu; \tag{30}$$

welche Gleichung sich sowohl auf L_5 als auf L_4 bezieht.

Wie zu erwarten war, stimmt diese Gleichung mit der von CHARLIER (M. d. H, IX § 4) auf anderem Wege erhaltenen überein. Wir zitieren einige Resultate seiner Diskussion von (30):

Die Bedingung einer periodischen Lösung ist offenbar: λ^2 reel und negativ. Dies ist der Fall, wenn

$$\mu < 0.0385,$$

was im Planetensysteme erfüllt ist.

Die Wurzeln λ^2 sind Funktionen von μ. Werden sie der Kleinheit von μ wegen nach Potenzen dieser Grösse entwickelt haben wir genähert:

$$(\lambda^2)_1 = -\frac{27}{4}\mu; \quad (\lambda^2)_2 = -1 + \frac{23}{4}\mu.$$

Jede Wurzel λ gibt ein Glied in dem allgemeinen Integrale von (27), das folgenderweise lautet:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta x_1 &= \sum_{i=1}^{4} A'_i e^{\lambda_i t}; \\
\delta y_1 &= \sum_{i=1}^{4} B'_i e^{\lambda_i t}; \\
\delta \xi_2 &= \sum_{i=1}^{4} C'_i e^{\lambda_i t}; \\
\delta \eta_2 &= \sum_{i=1}^{4} D'_i e^{\lambda_i t}.
\end{aligned}
\right\} \quad (31)
$$

Weil λ_i rein imaginäre Grössen sind, schreiben wir lieber (31) in der Form:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta x_1 &= A_1 \cos(\nu_1 t + a_1) + A_2 \cos(\nu_2 t + a_2); \\
\delta y_1 &= B_1 \cos(\nu_1 t + b_1) + B_2 \cos(\nu_2 t + b_2); \\
\delta \xi_2 &= C_1 \cos(\nu_1 t + c_1) + C_2 \cos(\nu_2 t + c_2); \\
\delta \eta_2 &= D_1 \cos(\nu_1 t + d_1) + D_2 \cos(\nu_2 t + d_2).
\end{aligned}
\right\} \quad (32)
$$

A, B, C, D; a, b, c, d sind Integrationskonstanten, von denen 4 arbiträr sind. Weiter ist

$$\nu_i^2 = -\lambda_i^2; \quad (i = 1, 2)$$

so dass

$$\nu_1^2 = \frac{27}{4}\mu; \quad \nu_2^2 = 1 - \frac{23}{4}\mu. \quad (33)$$

Die Perioden der Glieder der rechten Seiten von (32) sind durch

$$t_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}; \quad t_2 = \frac{2\pi}{\nu_2}; \quad (34)$$

gegeben.

Die Umlaufszeit Jupiters ist

$$T = \frac{2\pi}{n'} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}};$$

also

$$t_1 = \frac{\sqrt{1+\mu}}{\nu_1},\ T = 12.46\ T;$$
$$t_2 = \frac{\sqrt{1+\mu}}{\nu_2},\ T = 1.033\ T. \tag{35}$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten von (32) sind folglich langperiodisch; die Periode ist rund 148 Jahre und wächst mit abnehmendem μ ins Unendliche. Die Periode der zweiten Glieder sind gleich der Umlaufszeit Jupiters bis auf Grössen von der Ordnung μ.

Wir gehen jetzt zu (20) über, deren Lösung von

$$0 = \psi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda + F_{56}, & +F_{66} \\ -F_{55}, & -\lambda - F_{56} \end{vmatrix} \tag{36}$$

bedingt ist. Wenn auch hier mit μ^2 multiplizierte Glieder vernachlässigt werden, bekommen wir

$$\lambda^2 + 1 + \frac{1}{4}\mu = 0. \tag{37}$$

Die Bedingung einer periodischen Lösung ($\lambda^2 < 0$) ist hier für alle μ-Werten erfüllt.

Wir geben die Lösung von (37) folgende Form:

$$\delta\xi_3 = E_1 \cos(\nu_3 t + e_1);$$
$$\delta\eta_3 = F_1 \cos(\nu_3 t + f_1); \tag{38}$$

$$\nu_3^2 = -\lambda^2 = 1 + \frac{1}{4}\mu.$$

Die Periode der rechten Seiten sind hier

$$t_3 = \frac{\sqrt{1+\mu}}{\nu_3}.\ T = 1.0004\ T; \tag{39}$$

also auch hier nur um μ-Glieder von der Umlaufszeit Jupiters verschieden.

4. Berechnung der Integrationskonstanten.

Wir berechnen zuerst die Konstanten der Gleichungen (32). Durch Einsetzen von (32) sollen (27) identisch befriedigt werden. Nach dieser Substitution werden indessen die Schwierigkeiten der Berechnung von A'_1, a_1 u. s. w., wie es mir scheint, sehr gross, was durch eine andere Wahl der Form der Lösung abzuhelfen wäre. Anstatt (32) benutzen wir (31) und führen gleichzeitig ein System intermediären Integrationskonstanten ein:

$$\left.\begin{aligned}
A'_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-1};\; B'_1 = \beta_1 + \beta_2\sqrt{-1};\\
&\qquad C'_1 = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{-1};\; D'_1 = \delta_1 + \delta_2\sqrt{-1};\\
A'_2 &= \alpha_1 - \alpha_2\sqrt{-1};\; B'_2 = \beta_2 - \beta_2\sqrt{-1};\\
&\qquad C'_2 = \gamma_1 - \gamma_2\sqrt{-1};\; D'_2 = \delta_1 - \delta_2\sqrt{-1};\\
A'_3 &= \alpha_3 + \alpha_4\sqrt{-1};\; B'_3 = \beta_3 + \beta_4\sqrt{-1};\\
&\qquad C'_3 = \gamma_3 + \gamma_4\sqrt{-1};\; D'_3 = \delta_3 + \delta_4\sqrt{-1};\\
A'_4 &= \alpha_3 - \alpha_4\sqrt{-1};\; B'_4 = \beta_3 - \beta_4\sqrt{-1};\\
&\qquad C'_4 = \gamma_3 - \gamma_4\sqrt{-1};\; D'_4 = \delta_3 - \delta_4\sqrt{-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Die Gleichungen (31) werden dann:

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_1 &= 2\alpha_1\cos\nu_1 t + 2\alpha_2\sin\nu_1 t + 2\alpha_3\cos\nu_2 t + 2\alpha_4\sin\nu_2 t;\\
\delta y_1 &= 2\beta_1 \qquad\qquad + 2\beta_2 \qquad\qquad + 2\beta_3 \qquad\qquad + 2\beta_4 \qquad\qquad ;\\
\delta \xi_2 &= 2\gamma_1 \qquad\qquad + 2\gamma_2 \qquad\qquad + 2\gamma_3 \qquad\qquad + 2\gamma_4 \qquad\qquad ;\\
\delta \eta_2 &= 2\delta_1 \qquad\qquad + 2\delta_2 \qquad\qquad + 2\delta_3 \qquad\qquad + 2\delta_4 \qquad\qquad .
\end{aligned}\right\} \quad (31^*)$$

Wenn wir (40) in (27) einsetzen und die reellen und imaginären Glieder von einander trennen, bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1\alpha_2 + F_{12}\alpha_1 + F_{22}\beta_1 + F_{23}\gamma_1 + F_{24}\delta_1 &= 0;\\
\nu_1\beta_2 - F_{11}\alpha_1 - F_{12}\beta_1 - F_{13}\gamma_1 - F_{14}\delta_1 &= 0;\\
\nu_1\gamma_2 + F_{14}\alpha_1 + F_{24}\beta_1 + F_{34}\gamma_1 + F_{44}\delta_1 &= 0;\\
\nu_1\delta_2 - F_{13}\alpha_1 - F_{23}\beta_1 - F_{33}\gamma_1 - F_{34}\delta_1 &= 0;
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

$$\left.\begin{aligned} -\nu_1\alpha_1+F_{12}\alpha_2+F_{22}\beta_2+F_{23}\gamma_2+F_{24}\delta_2&=0;\\ -\nu_1\beta_1-F_{11}\alpha_2-F_{12}\beta_2-F_{13}\gamma_2-F_{13}\delta_2&=0;\\ -\nu_1\gamma_1+F_{14}\alpha_2+F_{24}\beta_2+F_{34}\gamma_2+F_{44}\delta_2&=0;\\ -\nu_1\delta_1-F_{13}\alpha_2-F_{23}\beta_2-F_{33}\gamma_2-F_{34}\delta_2&=0.\end{aligned}\right\}\quad(41^*)$$

Noch 8 Gleichungen von gerade derselben Form kommen hinzu, wenn die Indices 1, 2 gegen 3, 4 vertauscht werden.

Die Konstanten mit geraden Indices werden durch Substitution von (41) in (41*) eliminiert. Als Koeffizienten von α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_3, β_3, γ_3, δ_3 treten dann Summen der Produkte von F_{ij}. Mit unserem Grade der Annäherung bekommen wir folgende Relationen:

$$\begin{array}{llll} [-\nu^2+F_{11}\cdot F_{22}]\alpha & & -F_{24}\gamma & +F_{23}\delta=0;\\ & [-\nu^2+F_{11}\cdot F_{22}]\beta & +(3F_{23}+F_{14})\gamma & +(3F_{24}-F_{13})\delta=0;\\ (3F_{24}-F_{13})\alpha & -F_{23}\beta & +[-\nu^2+F_{33}\cdot F_{44}]\gamma & =0;\\ (-3F_{23}-F_{14})\alpha & -F_{24}\beta & & +[-\nu^2+F_{33}\cdot F_{44}]\delta= \end{array}$$

Hier bedeutet ν sowohl ν_1 als ν_2; α sowohl α_1 als α_3 u. s. w. Der Kürze wegen schreiben wir (42) folgenderweise:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha\qquad\quad +a_{13}\gamma+a_{14}\delta&=0;\\ a_{22}\beta+a_{23}\gamma+a_{24}\delta&=0;\\ a_{31}\alpha+a_{32}\beta+a_{33}\gamma\qquad\quad&=0;\\ a_{41}\alpha+a_{42}\beta\qquad\quad+a_{44}\delta&=0.\end{aligned}\right\}\quad(42^*)$$

Die Bedeutung von a_{ij} (i, $j=1$, 2, 3, 4) ist unmittelbar ersichtlich.

Als unabhängige Integrationskonstanten wählen wir nun α_1, α_3, γ_1, γ_3. Aus (42*) erhalten wir β, δ als Funktionen von α, γ:

$$\left.\begin{aligned}\beta&=-\frac{1}{a_{32}}(a_{31}\alpha+a_{33}\gamma);\\ \delta&=-\frac{1}{a_{14}}(a_{11}\alpha+a_{13}\gamma).\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind von ν unabhängig, mit Ausnahme von a_{ii} ($i=1$, 3). Wir bezeichnen mit

a'_{ii} die Werte von a_{ii}, wenn $\nu = \nu_1$; a''_{ii} lassen wir $\nu = \nu_2$ entsprechen. (43) nehmen dann folgende Form an:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{a_{32}}(a_{31}\alpha_1 + a'_{33}\gamma_1); \\ \beta_3 &= -\frac{1}{a_{32}}(a_{31}\alpha_3 + a''_{33}\gamma_3); \\ \delta_1 &= -\frac{1}{a_{14}}(a'_{11}\alpha_1 + a_{13}\gamma_1); \\ \delta_3 &= -\frac{1}{a_{14}}(a''_{11}\alpha_3 + a_{13}\gamma_3). \end{aligned} \tag{43*}$$

Für die weitere Rechnung benutzen wir die Werte von δx_1, δy, $\delta \xi_2$, $\delta \eta_3$ in der Oskulationsepoche, von welcher wir die Zeit rechnen. Wenn wir in (31*) $t = 0$ setzen, erhalten wir (Bezeichnungen leicht verständlich):

$$\begin{aligned} \delta x_1^{(0)} &= 2\alpha_1 + 2\alpha_3; \\ \delta y_1^{(0)} &= 2\beta_1 + 2\beta_3; \\ \delta \xi_2^{(0)} &= 2\gamma_1 + 2\gamma_3; \\ \delta \eta_2^{(0)} &= 2\delta_1 + 2\delta_3. \end{aligned} \tag{44}$$

(43*) und (44) bestimmen die arbiträren intermediären Integrationskonstanten; durch Elimination von β_1, β_3, δ_1, δ_3 bekommen wir:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_3 &= \delta x_1^{(0)}; \\ \frac{2a'_{11}}{a_{14}}\alpha_1 + \frac{2a''_{11}}{a_{14}}\alpha_3 &= -\frac{a_{13}}{a_{14}}\delta\xi_2^{(0)} - \delta\eta_2^{(0)}; \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_3 &= \delta\xi_2^{(0)}; \\ \frac{2a'_{33}}{a_{32}}\gamma_1 + \frac{2a''_{33}}{a_{32}}\gamma_3 &= -\frac{a_{31}}{a_{32}}\delta x_1^{(0)} - \delta y_1^{(0)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Durch (43*) und (41) werden die übrigen intermediären Konstanten als Funktionen von F_{ij} und α_1, α_3, γ_1, γ_3 berechnet.

Endlich werden A_1, a_1 u. s. w. in (32) mit der Hülfe folgender Formel erhalten:

$$\left.\begin{array}{llll}A_1\cos a_1 = \quad 2\alpha_1; & B_1\cos b_1 = \quad 2\beta_1; & C_1\cos c_1 = \quad 2\gamma_1; & D_1\cos d_1 = \quad 2\delta_1;\\ A_1\sin a_1 = -2\alpha_2; & B_1\sin b_1 = -2\beta_2; & C_1\sin c_1 = -2\gamma_2; & D_1\sin d_1 = -2\delta_2;\\ A_2\cos a_2 = \quad 2\alpha_3; & B_2\cos b_2 = \quad 2\beta_3; & C_2\cos c_2 = \quad 2\gamma_3; & D_2\cos d_2 = \quad 2\delta_3;\\ A_2\sin a_2 = -2\alpha_4; & B_2\sin b_2 = -2\beta_4; & C_2\sin c_2 = -2\gamma_4; & D_2\sin d_2 = -2\delta_4.\end{array}\right\} \quad (46)$$

Übrig ist die Berechnung von E_1, e_1, F_1, f_1 der Gleichung (38).

Durch Substitution von (38) in (28) sollen die letzteren Gleichungen identisch (d. h. für alle t-Werte) erfüllt sein. Wird t nach dieser Substitution $= 0$ gesetzt, und auch in (38), bekommen wir:

$$\begin{aligned} -\nu_3 E_1 \sin e_1 &= \quad F_{56}\,\delta\xi_8^{(0)} + F_{66}\,\delta\eta_8^{(0)};\\ E_1\cos e_1 &= \quad \delta\xi_8^{(0)};\\ -\nu_8 F_1 \sin f_1 &= -F_{55}\,\delta\xi_8^{(0)} - F_{56}\,\delta\eta_8^{(0)};\\ F_1\cos f_1 &= \quad \delta\eta_8^{(0)}. \end{aligned} \quad (47)$$

5. Genäherte Ausdrücke der Jupiterstörungen.

Nach (23) und (32), (38) nehmen die Veränderlichen genähert folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \sqrt{a} \quad &= 1 \quad + [A_1\cos a_1]\cos\nu_1 t +\\ &+ [-A_1\sin a_1]\sin\nu_1 t + [A_2\cos a_2]\cos\nu_2 t + [-A_2\sin a_2]\sin\nu_2 t;\\ y_1 = |\lambda - \lambda'| \quad &= [60°] + [B_1\cos b_1]\cos\nu_1 t +\\ &+ [-B_1\sin b_1]\sin\nu_1 t + [B_2\cos b_2]\cos\nu_2 t + [-B_2\sin b_2]\sin\nu_2 t;\\ \xi_2 = 2\sqrt[4]{a}\sin\frac{1}{2}\varphi\cos(-\pi+\lambda') &= \quad [C_1\cos c_1]\cos\nu_1 t +\\ &+ [-C_1\sin c_1]\sin\nu_1 t + [C_2\cos c_2]\cos\nu_2 t + [-C_2\sin c_2]\sin\nu_2 t;\\ \eta_2 = 2\sqrt[4]{a}\sin\frac{1}{2}\varphi\sin(-\pi+\lambda') &= \quad [D_1\cos d_1]\cos\nu_1 t +\\ &+ [-D_1\sin d_1]\sin\nu_1 t + [D_2\cos d_2]\cos\nu_2 t + [-D_2\sin d_2]\sin\nu_2 t; \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_3 &= 2\sqrt[4]{a\cos^2\varphi}\sin\frac{1}{2}I\cos(-\Omega+\lambda') = \qquad [E_1\cos e_1]\cos\nu_3 t + \\
&+ [-E_1\sin e_1]\sin\nu_3 t \qquad ; \\
\eta_3 &= 2\sqrt[4]{a\cos^2\varphi}\sin\frac{1}{2}I\sin(-\Omega+\lambda') = \qquad [F_1\cos f_1]\cos\nu_3 t + \\
&+ [-F_1\sin f_1]\sin\nu_3 t \qquad .
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

In (48) sind alle linearen Grössen in absolutem Mass, mit der halben grossen Achse der Jupiterbahn als Einheit, ausgedrückt, und die Zeiteinheit ist die kanonische = 58,132 mittlere Sonnentage.

Die Grössenordnungen der Störungsglieder sind aus den in § 4 skizzierten Berechnung der Integrationskonstanten nicht leicht zu entscheiden. Eine durchgeführte Rechnung, die im Abschnitt II folgen wird, zeigt, dass sie als Dignitätsreihen in Bezug auf μ *oder* $\sqrt{\mu}$ dargestellt werden können. Die Koeffizienten dieser Reihen sind Funktionen der konstanten Grössen F_{ij} und $\delta x_1^{(0)}$ u. s. w., folglich Funktionen der Bahnelemente. Es ist meine Absicht, in einem folgenden Aufsatze allgemeinere Formeln für die Störungsglieder aufzustellen, und dabei höhere Potenzen von μ sowie die Exzentrizität der Jupiterbahn mitzunehmen.

Die Perioden der Glieder mit dem Argumente $\nu_1 t$ sind, wie oben erwähnt, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, also sehr lang; die Perioden der anderen Glieder sind von der Umlaufszeit Jupiters um mit μ multiplizierten Grössen verschieden. Speziell zu bemerken ist, das Jupiter keine *sekularen* Störungen der Bahn des Asteroiden verursacht; dagegen können, wie wir in II sehen werden, einige Glieder der periodischen Störungen eine beträchtliche Grösse erreichen.

Die Frage von der Einwirkung anderer Planeten auf die Bewegung lasse ich vorläufig ausser Acht. Wegen der grossen Entfernungen sind jedenfalls ihre Störungen von der Asteroidbahn sehr klein, weshalb die Grenzen der Gültigkeit von (48) nicht allzu eng sein dürften.

II.

Angenäherte Berechnung der allgemeinen Jupiterstörungen des Planeten 588 Achilles (1906 T. G.).

Einleitung.

Am 22 Februar 1906 entdeckte WOLF in Heidelberg auf photographischem Wege einen kleinen Planeten, später als 1906 T. G. bezeichnet, dessen geringe Rektaszensionsbewegung auffällig war. Schon die ersten Bestimmungen der Elemente gaben auch einen Wert der mittleren Bewegung, der kleiner als alle bisher bekannten im Asteroidensysteme war, und welcher nur um einige Bogensekunden von Jupiters verschieden war. Eine nähere Untersuchung der Lage des Planeten im Verhältnis zu der Jupiters zeigte die ziemlich geringe Entfernung vom Librationspunkte L_5. Es scheint mir daher zweckmässig, die in *I* hergestellte Theorie für eine Überschlagsrechnung der Jupiterstörungen anzuwenden.

1. Berechnung der Hülfsgrössen $\delta x_1^{(0)}, \delta y_1^{(0)}, \delta\xi_2^{(0)}, \delta\eta_2^{(0)}, \delta\xi_3^{(0)}, \delta\eta_3^{(0)}$.

Als Grund der Rechnungen sind folgende von BIDSCHOF (A. N. 4155) abgeleitete Elemente benutzt:

588 *Achilles* (1906 T. G.) — *Jupiter*

Epoche 1906 Februar 22.5 M. Z. Berlin

$$M = 43°45'.6$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 129.24.2 \\ \Omega &= 315.31.1 \\ i &= 10.16.6 \end{aligned}\right\} 1906.0 \qquad I = 11°.21'.7 \qquad \begin{aligned} \Omega' &= 99°.30'.3 \\ i' &= 1.18.6 \end{aligned}$$

$$\varphi = 8.10.2$$

$$n = 294''.7$$

$$\log a = 0.7204 \qquad \log a' = 0.7162$$

Die Oskulationswerte der Veränderlichen werden aus I (9) berechnet; das Element a ist in der halben grossen Achse

der Jupiterbahn als Einheit auszudrücken. Nach STRÖMGREN (A. N. 4181) ist in der Epoche:

$$\lambda = 141°23'; \ \lambda' = 69°25' \quad (1906.0)$$

woraus

$$y_1^{(0)} = 71°58';$$
$$y_2^{(0)} = 344.30;$$
$$y_3^{(0)} = 113.54.$$

Aus I (18) und (23) erhalten wir folgende Werte der konstanten Hülfsgrössen:

$$\begin{aligned} &\delta x_1^{(0)} = +0.0052; \ \delta y_1^{(0)} = +0.2088 = +11°58'; \\ &\delta \xi_2^{(0)} = +0.1376; \ \delta \eta_2^{(0)} = -0.0382; \\ &\delta \xi_3^{(0)} = -0.0800; \ \delta \eta_3^{(0)} = +0.1806. \end{aligned} \qquad (1)$$

Die Jupitermasse μ setzen wir $= 0.001$.

2. Berechnung der intermediären Integrationskonstanten.

Die in I: 4 abgeleiteten Formeln werden angewandt, und zwar in folgender Ordnung: α_1, α_3, γ_1, γ_3 werden aus (45) berechnet, β_1, β_3, δ_1, δ_3 aus (43*); endlich alle Konstanten mit geraden Index aus (41). Als Kontrolle sind (41*) benutzt. Ich halte es aber nicht für nötig, diese etwas weitläufige Rechnungen mitzutheilen, sondern nur die Resultate, durch welche die Konstanten als Funktionen von μ dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= A_{10} + A_{11}\cdot\mu; & 2\beta_1 &= B_{10} + B_{11}\cdot\mu; \\ 2\alpha_2 &= A_{21}\cdot\mu; & 2\beta_2 &= B_{20} + B_{21}\cdot\mu; \\ 2\alpha_3 &= A_{31}\cdot\mu; & 2\beta_3 &= B_{31}\cdot\mu; \\ 2\alpha_4 &= A_{41}\cdot\mu; & 2\beta_4 &= B_{41}\cdot\mu; \\ 2\gamma_1 &= C_{11}\cdot\mu; & 2\delta_1 &= D_{11}\cdot\mu; \\ 2\gamma_2 &= C_{21}\cdot\mu; & 2\delta_2 &= D_{21}\cdot\mu; \\ 2\gamma_3 &= C_{30} + C_{31}\cdot\mu; & 2\delta_3 &= D_{30} + D_{31}\cdot\mu; \\ 2\gamma_4 &= C_{40} + C_{41}\cdot\mu; & 2\delta_4 &= D_{40} + D_{41}\cdot\mu; \end{aligned} \qquad (2)$$

Die Koeffizienten A, B, C, D sind als Funktionen von den Derivierten F_{ij}, den konstanten Hülfsgrössen in (1) und von ν folgenderweise definiert:

$$
\begin{aligned}
& A_{10} = \delta x_1^{(0)}; \\
-A_{31} = {} & A_{11} = \frac{27}{8}\delta\xi_2^{(0)} - \frac{15}{8}\delta\eta_2^{(0)}; \\
& -\nu_1 A_{21} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)} + \frac{9}{4}\delta y_1^{(0)}; \\
& -\nu_2 A_{41} = \frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)} + \frac{27}{8}\delta\eta_2^{(0)}; \\
& B_{10} = \delta y_1^{(0)}; \\
-B_{31} = {} & B_{11} = \frac{81}{40}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)} - \frac{27}{8}\delta\eta_2^{(0)}; \\
& -\nu_1 B_{20} = -3\,\delta x_1^{(0)}; \\
& -\nu_1 B_{21} = \frac{15}{2}\delta x_1^{(0)} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)} - \frac{81}{8}\delta\xi_2^{(0)} + \frac{45}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}; \\
& -\nu_2 B_{41} = \frac{27}{8}\delta\xi_2^{(0)} - \frac{39}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}; \\
-C_{31} = {} & C_{11} = -\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} + \frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)}; \\
& -\nu_1 C_{21} = \frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)}; \\
& C_{30} = \delta\xi_2^{(0)}; \\
& -\nu_2 C_{40} = -\delta\eta_2^{(0)}; \\
& -\nu_2 C_{41} = -\frac{21}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)} + \frac{27}{8}\delta y_1^{(0)} + \frac{57}{16}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)} + \frac{37}{16}\delta\eta_2^{(0)}; \\
-D_{31} = {} & D_{11} = -\frac{21}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)} + \frac{27}{8}\delta y_1^{(0)}; \\
& -\nu_2 D_{21} = -\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} - \frac{15}{4}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)}; \\
& D_{30} = \delta\eta_2^{(0)}; \\
& -\nu_2 D_{40} \quad - \delta\xi_2^{(0)}; \\
& -\nu_2 D_{41} = -\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} - \frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)} + \frac{55}{16}\delta\xi_2^{(0)} - \frac{57}{16}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Diese Formeln gelten für den Librationspunkt L_5. Die Relationen zwischen den intermediären Integrationskonstanten und den Grössen A_1, a u. s. w. in I (32) sind in I (46) gegeben. Wenn wir uns erinnern, dass ν_1 von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ ist, können wir offenbar einige der linken Glieder in I (46) als Potenzreihen in $\sqrt{\mu}$ schreiben. Die übrigen sind dagegen Potenzreihen in μ. Durch Kombination von I (46) und (47) mit II (3) nehmen die Störungskoeffizienten in I (48) die in 3. gegebene Form an.

3. **Darstellung der Störungsglieder als Funktionen von μ.** **Die Störunge**

$$A_1 \cos a_1 = \quad * \quad + \delta x_1^{(0)} \quad *$$

$$A_1 \sin a_1 = \quad + \left[+ \delta x_1^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \delta y_1^{(0)} \right] . \sqrt{\mu}$$

$$A_2 \cos a_2 = \quad * \quad * \quad *$$

$$A_2 \sin a_2 = \quad * \quad * \quad *$$

$$B_1 \cos b_1 = \quad * \quad + \delta y_1^{(0)} \quad *$$

$$B_1 \sin b_1 = \left[- \frac{2}{3} \sqrt{3} \delta x_1^{(0)} \right] \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad + \left[+ \frac{5}{3} \sqrt{3}\, \delta x_1^{(0)} - \delta y_1^{(0)} - \frac{9}{4} \sqrt{3}\, \delta \xi_2^{(0)} + \frac{15}{4} \delta \eta_2^{(0)} \right] . \sqrt{\mu}$$

$$B_2 \cos b_2 = \quad * \quad * \quad *$$

$$B_2 \sin b_2 = \quad * \quad * \quad *$$

$$C_1 \cos c_1 = \quad * \quad * \quad *$$

$$C_1 \sin c_1 = \quad * \quad * \quad + \left[+ \frac{5}{4} \delta x_1^{(0)} \right] . \sqrt{\mu}$$

$$C_2 \cos c_2 = \quad * \quad + \delta \xi_2^{(0)} \quad *$$

$$C_2 \sin c_2 = \quad * \quad - \delta \eta_2^{(0)} \quad *$$

$$D_1 \cos d_1 = \quad * \quad * \quad *$$

$$D_1 \sin d_1 = \quad * \quad * \quad + \left[- \frac{3}{4} \sqrt{3}\, \delta x_1^{(0)} - \frac{5}{2} \delta y_1^{(0)} \right] . \sqrt{\mu}$$

$$D_2 \cos d_2 = \quad * \quad + \delta \eta_2^{(0)} \quad *$$

$$D_2 \sin d_2 = \quad * \quad - \delta \xi_2^{(0)} \quad *$$

der mittleren Bewegung und der mittleren Länge.

$$\left[\qquad +\frac{27}{8}\delta\xi_2^{(0)} \quad -\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}\right]\cdot\mu;$$

*

$$\left[\qquad -\frac{27}{8}\delta\xi_2^{(0)} \quad +\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}\right]\cdot\mu;$$

$$\left[\qquad +\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)}+\frac{27}{8}\delta\eta_2^{(0)} \right]\cdot\mu;$$

$$\left[\qquad +\frac{81}{40}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)}-\frac{27}{8}\delta\eta_2^{(0)} \right]\cdot\mu;$$

*

$$\left[\qquad -\frac{81}{40}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)}+\frac{27}{8}\delta\eta_2^{(0)} \right]\cdot\mu;$$

$$\left[\qquad +\frac{27}{8}\delta\xi_2^{(0)} \quad -\frac{39}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}\right]\cdot\mu; \qquad (4)$$

$$\left[-\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} \quad +\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)} \qquad \right]\cdot\mu;$$

*

$$\left[+\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} \quad -\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)} \qquad \right]\cdot\mu;$$

$$\left[-\frac{21}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)}+\frac{27}{8}\delta y_1^{(0)} \quad +\frac{57}{16}\sqrt{3}\,\delta\xi_2^{(0)}-\frac{9}{16}\delta\eta_2^{(0)} \right]\cdot\mu;$$

$$\left[-\frac{21}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)}+\frac{27}{8}\delta y_1^{(0)} \qquad \right]\cdot\mu;$$

*

$$\left[+\frac{21}{8}\sqrt{3}\,\delta x_1^{(0)}-\frac{27}{8}\delta y_1^{(0)} \qquad \right]\cdot\mu;$$

$$\left[-\frac{27}{8}\delta x_1^{(0)} \quad +\frac{15}{8}\sqrt{3}\,\delta y_1^{(0)}+\frac{9}{16}\delta\xi_2^{(0)} \quad -\frac{57}{16}\sqrt{3}\,\delta\eta_2^{(0)}\right]\cdot\mu;$$

$$
\begin{aligned}
E_1 \cos e_1 &= + \delta\xi_3^{(0)}; \\
E_1 \sin e_1 &= + \delta\eta_3^{(0)} + \left[-\frac{3}{8}\sqrt{3}\,\delta\xi_3^{(0)} + \frac{3}{8}\,\delta\eta_3^{(0)}\right]\cdot\mu; \\
F_1 \cos f_1 &= + \delta\eta_3^{(0)}; \\
F_1 \sin f_1 &= - \delta\xi_3^{(0)} + \left[+\frac{3}{8}\delta\xi_3^{(0)} \quad + \frac{3}{8}\sqrt{3}\,\delta\eta_3^{(0)}\right]\cdot\mu.
\end{aligned}
\qquad (4^*)
$$

Die Gleichungen (4) und (4*) zeigen deutlich die Abhängigkeit der Störungsglieder von der Oskulationsgrössen $\delta x_1^{(0)}$ u. s. w.

Die halbe grosse Achse der Bahn, d. h. die mittlere Bewegung, ist ziemlich kleinen Schwankungen unterworfen, wogegen in δy_1, d. h. in der Störung senkrecht zum Radius Vector, ein grosses, mit $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ multipliziertes Glied vorkommt, was alles mit den Untersuchungen von CHARLIER übereinstimmt.

Für eine nähere Schätzung der Störungen setzen wir (1) in (4) und (4*) ein und bekommen dadurch folgende Tafel:

	$\cos\nu_1 t$	$\sin\nu_1 t$	$\cos\nu_2 t$	$\sin\nu_2 t$	$\cos\nu_3 t$	$\sin\nu_3 t$	
δx_1	+0.0058	+0.0060	−0.0006	+0.0003			$\sqrt{a}-1$
δy_1	+0.2094	−0.2173	−0.0006	+0.0008			$[\lambda-(\lambda'+60°)]$
$\delta\xi_2$	+0.0007	+0.0002	+0.1369	+0.0398			$2\sqrt[4]{a}\sin\frac{1}{2}\varphi\cos(-\pi+\lambda')$
$\delta\eta_2$	+0.0007	−0.0167	−0.0389	−0.1366			$2\sqrt[4]{a}\sin\frac{1}{2}\varphi\sin(-\pi+\lambda')$
$\delta\xi_3$					−0.0800	+0.1807	$2\sqrt[4]{a\cos^2\varphi}\sin\frac{1}{2}I\cos(-\Omega+\lambda'$
$\delta\eta_3$					+0.1806	+0.0801	$2\sqrt[4]{a\cos^2\varphi}\sin\frac{1}{2}I\sin(-\Omega+\lambda'$

Alle Glieder sind wie früher in a' als Einheit ausgedrückt und die Zeiteinheit die kanonische.

Wir aus (5) ersichtlich ist, sind in δx_1 und δy_1 die langperiodischen Glieder überwiegend, wogegen wie natürlich in $\delta\xi_2$, $\delta\eta_2$, $\delta\xi_3$, $\delta\eta_3$ die kurzperiodischen hauptsächlich oder ausschliesslich von Bedeutung sind. Im folgenden werden

[1] Die Übereinstimmung der numerischen Werte einiger Glieder ist in der gewählten Form (I (32) und (48)) der Integrale zu suchen.

daher nur die Grenzen der Schwankungen der mittleren Bewegung und der mittleren Länge berechnet, während eine eingehende Diskussion der Störungen einer späteren Untersuchung vorbehalten wird.

Die Maximalwerte von δx_1 und δy_1 sind offenbar annähernd gleich A_1 und B_1 (s. 1 (48), folglich aus Tafel (5):

$$\text{Maximum von} \begin{cases} \delta x_1 = |\sqrt{a} - 1| & = 0.0083; \\ \delta y_1 = |\lambda - (\lambda' + 60°)| & = 0.3018. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich, dass die oskulierende mittlere Bewegung höchstens $\pm$ 7″.5 von derjenigen Jupiters abweichen kann. Sie oszilliert also zwischen 291″.6 und 306″.6. Die grösste Entfernung vom Librationspunkte ist, im Bogenmass, ungefär $\pm$ 17°.3.

Eine genauere und umfassendere Störungsrechnung für diesen Planeten ist, wie es mir scheint, noch nicht zweckmässig, weil die bisherigen Beobachtungen zu nahe liegen um eine schärfere Bestimmung der Integrationskonstanten zuzulassen. Unter allen Umständen dürften doch die numerischen Werte in (5) eine Vorstellung der Grössenordnung der Störungen geben.



Tryckt den 27 maj 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:o 21.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

ÜBER DIE RESTGLIEDER
EINIGER FORMELN FÜR
MECHANISCHE QUADRATUR

VON

H. P. NIELSEN



UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 21.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 36.

Über die Restglieder einiger Formeln für mechanische Quadratur.

Von

H. P. NIELSEN.
Assistent, Kopenhagen.

Mitgeteilt am 12. Februar 1908 durch K. BOHLIN und C. V. L. CHARLIER.

In dem zweiten Bande von »Die Mechanik des Himmels» von Professor C. V. L. CHARLIER bemerkt der Verfasser Seite 47, dass eine Untersuchung über das Restglied in der Reihe (7) noch nicht vorliegt, und dass eine solche Untersuchung von der allergrössten Bedeutung für den praktischen Rechner sein würde. — Ich werde im folgenden eine Methode für die Herleitung dieser und ähnlicher Reihen angeben, wodurch man zugleich einen Ausdruck für das Restglied bekommt.

1.

Ich gehe von der NEWTON'schen Interpolationsformel mit dem von CAUCHY gefundenen Restglied (Oeuvres P. V. S. 422, Formel (3), Ausgabe von 1885)

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(x_1) + (x-x_1)\delta^1(x_1, x_2) + (x-x_1)(x-x_2)\delta^2(x_1, x_2, x_3) + \cdots \\ + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})\delta^{n-1}(x_1, x_2\ldots x_n) + \\ + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\frac{f^n(u)}{\underline{|n}} \end{aligned}\right\} (1)$$

aus. In dieser Formel bedeuten $f(x)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... die den reellen Argumenten $x, x_1, x_2, \ldots$ entsprechenden Funktions-

werte, während $\delta^1(x_1, x_2)$, $\delta^2(x_1, x_2, x_3)\ldots$ die dividirten Differenzen, also

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\delta^1(x_2, x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta^1(x_1, x_2) - \delta^1(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$$

u. s. w.,

sind. Es ist in (1) vorausgesetzt, dass $f(x)$ und ihre n ersten Differentialqvotienten in dem Intervalle reell und kontinuirlich sind, welches von dem Argumenten $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgenommen wird. u ist ein in diesem Intervalle liegender Wert von x.

2.

Multiplizirt man die Gleichung (1) mit $\frac{dx}{\omega}$ und integrirt man zwischen a und $a + \omega$, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = f(x_1) + A_1\delta^1(x_1, x_2) + A_2\delta^2(x_1, x_2, x_3) + \cdots \\ + A_{n-1}\delta^{n-1}(x_1, x_2 \ldots x_n) + R, \end{aligned}\right\} (2)$$

wo

$$A_p = \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p)\,dx$$

$$R = \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\frac{f^n(u)}{\lfloor n}\,dx.$$

In dem Falle, dass $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ nicht das Zeichen wechselt, wenn x von a bis $a + \omega$ variirt, ist nach einem bekannten Satz aus der Integralrechnung

$$R = \frac{f^n(u_1)}{\lfloor n} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\,dx = A_n \cdot \frac{f^n(u_1)}{\lfloor n},$$

wo u_1 einer der Werte ist, den u annehmen kann, also ein Wert, der in dem von den Argumenten a, $a+\omega$, $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgenommenen Intervall liegt. Unter der genannten Bedingung kann (2) also

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = f(x_1) + A_1\,\delta^1(x_1, x_2) + A_2\,\delta^2(x_1, x_2, x_3) + \cdots \\ + A_{n-1}\,\delta^{n-1}(x_1, \ldots x_n) + A_n \frac{f^n(u_1)}{\lfloor n}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

geschrieben werden.

3.

Man kann jetzt zeigen, dass die Formel (9) S. 49 und die Formeln (A), (B) und (C) S. 51 in »Die Mechanik des Himmels, II» mit zugehörenden Restgliedern spezielle Fälle der gefundenen Formel (3) sind.

Um die Formel (9) herzuleiten setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \omega \\ x_2 &= a \\ x_3 &= a - \omega \\ x_4 &= a - 2\omega \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a - (n-2)\,\omega. \end{aligned}$$

Setzen wir in den Ausdrücken für die dividirten Differenzen diese Werte ein, erhalten wir

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{f(a+\omega) - f(a)}{\omega} = \frac{1}{\omega} f_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\delta^1(x_2, x_3) = \frac{f(a) - f(a-\omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega} f_0^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta^1(x_1, x_2) - \delta^1(x_2, x_3)}{2\omega} = \frac{1}{\omega^2 \lfloor 2} f_0^{\mathrm{II}}(a),$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\omega^3 \lfloor 3} f_0^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^{n-1}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{1}{\omega^{n-1} \lfloor n-1} f_0^{(n-1)}\left(a - \frac{n-3}{2}\omega\right).$$

Die Bedingung im Artikel (3) ist genügt, und die Formel (3) gibt dann, wenn man zugleich $A_p = \omega^p \lfloor p . B_p$ setzt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx &= f(a+\omega) + B_1 f_0^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + B_2 f_0^{\mathrm{II}}(a) + \\ &+ B_3 f_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \cdots + B_{n-1} f_0^{(n-1)}\left(a - \frac{n-3}{2}\omega\right) + B_n \omega^n f^n(u_1),\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}B_p = \frac{1}{\omega^p \lfloor p} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} &(x-a-\omega)(x-a)(x-a+\omega)\ldots \\ &(x-a+(p-2)\omega)\,dx\end{aligned}\right\} \quad .. (5)$$

und

$$a-(n-2)\omega < u_1 < a+\omega \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Führt man die Substitution $x = a + \omega z$ ein, wird (5) zu

$$B_p = \frac{1}{\lfloor p}\int_0^1 (z-1)z(z+1)(z+2)\ldots(z+p-2)\,dz \quad .. (7)$$

simplifizirt. Das Restglied kann infolge (6)

$$B_n \omega^n f^n(a+\omega-\vartheta(n-1)\omega) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

geschrieben werden, wo ϑ positiv und kleiner als 1 ist.

Die Formel (4) ist mit der Formel (9) S. 49 in »Die Mechanik des Himmels, II» identisch. Die Koeffizienten werden mittelst (7) besonders leicht berechnet. Die ersten Werte werden

$$B_1 = \int_0^1 (z-1)\,dz = -\tfrac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{\lfloor 2}\int_0^1 (z^2-z)\,dz = -\tfrac{1}{12}$$

$$B_3 = \frac{1}{\lfloor 3}\int_0^1 (z^3-z)\,dz = -\tfrac{1}{24}$$

$$B_4 = \frac{1}{\lfloor 4}\int_0^1 (z^4+2z^3-z^2-2z)\,dz = -\tfrac{19}{720}$$

$$B_5 = \frac{1}{\underline{|5}} \int_0^1 (z^5 + 5z^4 + 5z^3 - 5z^2 - 6z)\,dz = -\tfrac{3}{160}$$

$$B_6 = \frac{1}{\underline{|6}} \int_0^1 (z^6 + 9z^5 + 25z^4 + 15z^3 - 26z^2 - 24z)\,dz$$

$$= -\tfrac{863}{60480}.$$

Wählt man z. B. in der Formel (4) $n = 6$, bekommt man also

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = f(a+\omega) - \tfrac{1}{2} f_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{12} f_0^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{1}{24} f_0^{\mathrm{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$- \tfrac{19}{720} f_0^{\mathrm{IV}}(a - \omega) - \tfrac{3}{160} f_0^{\mathrm{V}}(a - \tfrac{3}{2}\omega) - \tfrac{863}{60480}\omega^6 f^6(a + \omega - \vartheta \cdot 5\omega).$$

4.

In ähnlicher Weise wird die Formel (A) in »Die Mechanik des Himmels» hergeleitet, wenn man

$$x_1 = a$$
$$x_2 = a + \omega$$
$$x_3 = a + 2\omega$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = a + (n-1)\,\omega$$

setzt. Die dividirten Differenzen werden dann

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{f(a+\omega) - f(a)}{\omega} = \frac{1}{\omega} f_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\omega^2 \underline{|2}} f_0^{\mathrm{II}}(a + \omega)$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\omega^3 \underline{|3}} f_0^{\mathrm{III}}(a + \tfrac{3}{2}\omega)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^{n-1}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{1}{\omega^{n-1}\underline{|n-1}} f_0^{(n-1)}\left(a + \frac{n-1}{2}\omega\right).$$

Mittelst der Formel (3) bekommt man dann, wenn $A_p = \omega^p \underline{|p} \cdot C_p$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx &= f(a) + C_1 f_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + C_2 f_0^{\mathrm{II}}(a + \omega) + \cdots \\ &+ C_{n-1} f_0^{(n-1)}\left(a + \frac{n-1}{2}\omega\right) + C_n \omega^n f^n(u_1)\end{aligned}\right\}(9)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}C_p &= \frac{1}{\omega^p \lfloor p} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}(x-a)(x-a-\omega)(x-a-2\omega)\ldots \\ &\qquad (x-a-(p-1)\omega)\,dx \\ &= \frac{1}{\lfloor p}\int_0^1 z(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-p+1)\,dz\end{aligned}\right\}(10)$$

und

$$a < u_1 < a + (n-1)\omega.$$

Das Restglied kann also

$$C_n \omega^n f^n(a + \vartheta(n-1)\omega) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

geschrieben werden, wo $0 < \vartheta < 1$.

Die Formel (9) ist mit der Formel (A) in »Die Mechanik des Himmels» identisch. Die Koeffizienten können infolge (10) berechnet werden; diese Arbeit kann man aber hier sparen, da

$$C_p = (-1)^p \cdot B_p.$$

Setzt man nämlich in (10) $z = 1 - y$, bekommt man

$$C_p = \frac{(-1)^p}{\lfloor p}\int_0^1 (y-1)y(y+1)\ldots(y+p-2)\,dy = (-1)^p B_p$$

Also ist für $n = 6$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx &= f(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{12} f_0^{\mathrm{II}}(a+\omega) + \tfrac{1}{24} f_0^{\mathrm{III}}(a + \tfrac{3}{2}\omega) - \\ &- \tfrac{19}{720} f_0^{\mathrm{IV}}(a + 2\omega) + \tfrac{3}{160} f_0^{\mathrm{V}}(a + \tfrac{5}{2}\omega) - \tfrac{863}{60480}\omega^6 f^6(a + \vartheta\cdot 5\omega).\end{aligned}$$

5.

Die Formel (B) in »Die Mechanik des Himmels» ensteht, wenn man in (3)

$$x_1 = a$$
$$x_2 = a - \omega$$
$$x_3 = a - 2\omega$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = a - (n-1)\omega$$
$$A_p = \omega^p \lfloor p \cdot D_p$$

setzt. Hierdurch findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = f(a) + D_1 f_0^{\mathrm{I}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) + D_2 f_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + \cdots \\ + D_{n-1} f_0^{(n-1)}\left(a - \frac{n-1}{2}\omega\right) + D_n \omega^n f^n(u_1), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} D_p = \frac{1}{\omega^p \lfloor p} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a+\omega)(x-a+2\omega)\ldots(x-a+(p-1)\omega)dx \\ = \frac{1}{\lfloor p}\int_0^1 z(z+1)(z+2)\ldots(z+p-1)\,dz \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$a - (n-1)\omega < u_1 < a + \omega$$

Das Restglied kann

$$D_n \omega^n f^n(a + \omega - \vartheta \cdot n\omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

geschrieben werden.

Für die ersten Werte der Koeffizienten bekommt man infolge (13)

$$D_1 = \int_0^1 z\,dz = \tfrac{1}{2}$$

$$D_2 = \frac{1}{\lfloor 2}\int_0^1 (z^2 + z)\,dz = \tfrac{5}{12}$$

$$D_3 = \frac{1}{\lfloor 3}\int_0^1 (z^3 + 3z^2 + 2z)\,dz = \tfrac{3}{8}$$

$$D_4 = \frac{1}{\underline{|4}} \int_0^1 (z^4 + 6z^3 + 11z^2 + 6z)\, dz = \frac{251}{720}$$

$$D_5 = \frac{1}{\underline{|5}} \int_0^1 (z^5 + 10z^4 + 35z^3 + 50z^2 + 24z)\, dz = \frac{95}{288}$$

$$D_6 = \frac{1}{\underline{|6}} \int_0^1 (z^6 + 15z^5 + 85z^4 + 225z^3 + 274z^2 + 120z)\, dz$$

$$= \frac{19087}{60480}$$

so dass (12) für $n = 6$

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x)\, dx = f(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{\mathrm{I}} (a - \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{5}{12} f_0^{\mathrm{II}} (a - \omega) + \tfrac{3}{8} f_0^{\mathrm{III}} (a - \tfrac{3}{2}\omega)$$

$$+ \tfrac{251}{720} f_0^{\mathrm{IV}} (a - 2\omega) + \tfrac{95}{288} f_0^{\mathrm{V}} (a - \tfrac{5}{3}\omega) + \tfrac{19087}{60480} \omega^6 f^6 (a + \omega - \vartheta \cdot 6\omega)$$

wird.

6.

Die Formel (C) findet man, wenn man

$$\begin{aligned}
n &= 2m \\
x_1 &= a \\
x_2 &= a + \omega \\
x_3 &= a - \omega \\
x_4 &= a + 2\omega \\
&\dots\dots\dots \\
x_{n-1} &= a - (m-1)\,\omega \\
x_n &= a + m\,\omega
\end{aligned}$$

setzt. Hierdurch wird

$$\delta^1 (x_1, x_2) = \frac{1}{\omega} f_0^{\mathrm{I}} (a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\delta^2 (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\omega^2 \underline{|2}} f_0^{\mathrm{II}} (a)$$

$$\delta^3 (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\omega^3 \underline{|3}} f_0^{\mathrm{III}} (a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

. . . .

$$\delta^{2m-2}(x_1, x_2 \ldots x_{2m-1}) = \frac{1}{\omega^{2m-2}\underline{|2m-2}} f_0^{(2m-2)}(a),$$

$$\delta^{2m-1}(x_1, x_2 \ldots x_{2m}) = \frac{1}{\omega^{2m-1}\underline{|2m-1}} f_0^{(2m-1)}(a + \tfrac{1}{2}\omega).$$

Wenn man diese Ausdrücke in (3) einsetzt, bekommt man, indem man $A_p = \omega^p \underline{|p} \cdot E_p$ setzt,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)dx = f(a) + E_1 f_0^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + E_2 f_0^{\mathrm{II}}(a) + E_3 f_0^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \cdots \\ + E_{2m-2} f_0^{(2m-2)}(a) + E_{2m-1} f_0^{(2m-1)}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + E_{2m}\omega^{2m} f^{2m}(u_1) \end{array}\right\} \quad (15)$$

wo

$$a - (m-1)\omega < u_1 < a + m\omega$$

$$E_{2p} = \frac{1}{\omega^{2p}\underline{|p}} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a-\omega)(x-a+\omega)(x-a-2\omega)\ldots(x-a-p\omega)dx,$$

$$E_{2p+1} = \frac{1}{\omega^{2p+1}\underline{|2p+1}} \cdot \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a-\omega)(x-a+\omega)\ldots$$
$$(x-a-p\omega)(x-a+p\omega)\,dx$$

oder, wenn man die Substitution $x = a + \omega(z + \frac{1}{2})$ macht,

$$E_{2p} = \frac{1}{\underline{|2p}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2 - (\tfrac{1}{2})^2)(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2)\ldots\left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right) dz \quad \ldots \quad (16)$$

$$E_{2p+1} = \frac{1}{\underline{|2p+1}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2 - (\tfrac{1}{2})^2)(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2)\ldots$$
$$\left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right)\left(z + \frac{2p+1}{2}\right)dz$$

Man beweist nun leicht, dass

$$E_{2p+1} = \tfrac{1}{2}E_{2p}.$$

Denn

$$E_{2p+1} = \frac{1}{\underline{|2p+1}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2-(\tfrac{1}{2})^2)(z^2-(\tfrac{3}{2})^2)\ldots\left(z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right)z\,dz + \tfrac{1}{2}E_{2p},$$

das Integral aber verschwindet, da die Funktion unter dem Integralzeichen ungerade ist. Man kann deshalb die gefundene Formel (15)

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = f(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{\rm I}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + E_2[f_0^{\rm II}(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{\rm III}(a+\tfrac{1}{2}\omega)] + \cdots$$
$$+ E_{2m-2}[f_0^{(2m-2)}(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{(2m-1)}(a+\tfrac{1}{2}\omega)] + E_{2m}\,\omega^{2m} f^{2m}(u_1),$$

schreiben. Nun ist aber

$$f_0^{(p)}(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{(p+1)}(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f_{\frac{1}{2}}^{(p)}(a+\tfrac{1}{2}\omega),$$

und wir bekommen also die Formel in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx &= f_{\frac{1}{2}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + E_2 f_{\frac{1}{2}}^{\rm II}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \cdots \\ &+ E_{2m-2} f_{\frac{1}{2}}^{(2m-2)}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + E_{2m}\,\omega^{2m} f^{2m}(u_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (17)$$

die mit der Formel (C) in »Die Mechanik des Himmels» übereinstimmt. Das Restglied kann die Form

$$E_{2m}\,\omega^{2m} f^{2m}(a + \tfrac{1}{2}\omega \pm \vartheta(m - \tfrac{1}{2})\omega), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

annehmen, wo $0 < \vartheta < 1$. Die Koeffizienten kann man mittelst (16) berechnen, die auch

$$E_{2p} = \frac{2}{\lfloor 2p}\int_0^{\frac{1}{2}} (z^2 - (\tfrac{1}{2})^2)(z^2 - (\tfrac{3}{2})^2)\ldots\left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right) dz$$

geschrieben werden kann. Setzt man $z = \frac{1}{2}y$, nimmt diese Formel die Gestalt

$$E_{2p} = \frac{1}{2^{2p}\lfloor 2p}\int_0^1 (y^2 - 1^2)(y^2 - 3^2)(y^2 - 5^2)\ldots(y^2 - (2p-1)^2)\,dy \quad (19)$$

an.

Die ersten Werte werden

$$E_2 = \frac{1}{2^2\lfloor 2}\int_0^1 (y^2 - 1)\,dy = -\tfrac{1}{12},$$

$$E_4 = \frac{1}{2^4\lfloor 4}\int_0^1 (y^4 - 10y^2 + 9)\,dy = \tfrac{11}{720},$$

$$E_6 = \frac{1}{2^6 \lfloor 6} \int_0^1 (y^6 - 35y^4 + 259y^2 - 225)\, dy = -\frac{191}{60480}$$

$$E_8 = \frac{1}{2^8 \lfloor 8} \int_0^1 (y^8 - 84y^6 + 1974y^4 - 12916y^2 + 11025)\, dy = \frac{2497}{3628800}.$$

Für $m = 4$ wird also die Formel (17)

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} f(x)\, dx = f_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{12} f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{II}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{11}{720} f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{IV}}(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$- \tfrac{191}{60480} f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{VI}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{2497}{3628800} f^{8}(a + \tfrac{1}{2}\omega \pm \vartheta \cdot \tfrac{7}{2}\omega).$$

7.

Wenn man in der Formel (17) a gegen $a + r\omega$ vertauscht und rücksichtlich r von $r = 0$ bis $r = s - 1$ summirt, erhält man die Formel (7) in »Die Mechanik des Himmels, II», nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_a^{a+s\omega} f(x)\, dx = \sum_{r=0}^{s-1} f_{\frac{1}{2}}(a + r\omega + \tfrac{1}{2}\omega) &+ E_2[f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{I}}(a + s\omega) - f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{I}}(a)] \\ &+ E_4[f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{III}}(a + s\omega) - f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{III}}(a)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ E_{2m-2}[f_{\frac{1}{2}}^{(2m-3)}(a + s\omega) - f_{\frac{1}{2}}^{(2m-3)}(a)] \\ &+ R \end{aligned}\right\} (20)$$

wo

$$R = E_{2m} \cdot \omega^{2m} \sum_{r=0}^{s-1} f^{2m}(a + r\omega + \tfrac{1}{2}\omega \pm \vartheta_r (m - \tfrac{1}{2})\omega) \quad \ldots\ldots (21)$$

das Restglied ist.

Zusatz von C. V. L. Charlier. Die obige Methode ist offenbar sehr geeignet zur Bestimmung des Werthes der Restglieder in den Formeln für mechanische Quadratur. Die EULER'sche Summationsformel, die ich, nach ENCKE's Vor-

gang, in meinen Vorlesungen als Ausgangsformel benutzt habe, bildet hier einen unnötigen Umweg. Die von Herrn NIELSEN gefundenen Ausdrücke für das Restglied sind zwar noch nicht in solcher Form, dass sie der praktische Rechner benutzen kann; es unterliegt aber keinem Zweifel, dass man unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ hieraus für die Praxis bequeme Restformeln ableiten kann.

Tryckt den 4 juni 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:O 23.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

DIE ROTATION

DER

PLANETEN MERKUR UND VENUS

VON

C. V. L. CHARLIER.



UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 21.

ÜBER DIE INTERMEDIÄRE BAHN DER KLEINEN PLANETEN

VON

C. V. L. CHARLIER

LUND 1904

BUCHDRUCKEREI HÅKAN OHLSSON

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 23.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 37

Die Rotation der Planeten Merkur und Venus.

Von

C. V. L. CHARLIER.

1. Bekanntlich ist unsere Kenntnis der Rotationsverhältnisse der beiden sonnennahen Planeten Merkur und Venus sehr mangelhaft. Auch über die Werte der Trägheitsmomente der Planeten und über die Richtung der Hauptträgheitsachsen weiss man so gut wie Nichts. Es liegt auch in der Natur der Sache, dass die Beobachtungen schwerlich zuverlässige Werte der letztgenannten Grössen (die Grösse und die Richtung der Trägheitsachsen) geben können, da die beiden Planeten von den *Phasen* stark verstellt gesehen werden.[1] Es erscheint unter solchen Umständen nicht der Mühe wert die Rotationsverhältnisse dieser Planeten einer mathematischen Analyse zu unterwerfen. Es gibt indessen eine eigentümliche Art der Rotation, die von der Theorie als möglich hervorgehoben wird, die aber — wie es scheint — nicht von den Beobachtern in Betracht gezogen worden ist. Ich will diese Rotationsart hier untersuchen. Wenn spätere Beobachtungen zeigen werden, dass diese Untersuchung nicht auf die Planeten Merkur und Venus ihre Anwendung finden, werden wahrscheinlich anderswo im Weltsystem Beispiele dieser Rotationsart nicht fehlen.

[1] Höchstens könnte man erwarten, dass man — besonders aus photographischen Beobachtungen der Vorübergängen der beiden Planeten über die Sonnenscheibe — die Dimensionen der Planeten senkrecht zum Radius Vector bestimmen könnte, obgleich unten aussereinandergesetzte Gründe wahrscheinlich machen, dass die entsprechende Abplattung eine äusserst geringe ist.

In meinen Vorlesungen über die Rotation des Mondes habe ich gezeigt, dass *bei gebundener Rotation* drei verschiedene Rotationstypen vorkommen können, nämlich

1). die Achse des *kleinsten* Trägheitsmomentes ist gegen den Zentralkörper gerichtet und die Rotation findet um die Achse des *grössten* Trägheitsmomentes statt.

Dies ist der Fall, der beim Mond der Erde vorkommt.

2) Die Achse des *mittleren* Trägheitsmomentes ist gegen den Zentralkörper gerichtet und die Rotation findet um die Achse des *kleinsten* Trägheitsmomentes statt.

In diesen beiden Fällen müssen ausserdem gewisse Ungleichheiten erfüllt sein, die ich an a. O. abgeleitet habe.

Obgleich die Bedingungen für 1) oder 2) nicht erfüllt sind, kann doch eine gebundene Rotation vorkommen. Diese Rotation erscheint aber unter den Voraussetzungen, die den Untersuchungen über die Rotation des Mondes zu Grunde liegen, als

3) *»unstabil»*, wogegen die unter 1) und 2) aufgeführten Bewegungsformen stabil sind.

Die Unstabilität rührte daher, dass in den Variationsgleichungen, die zu einer gewissen partikularen Lösung des Rotationsproblems gehören, Exponentialgrössen auftreten, welche mit der Zeit über alle Grenzen wachsen.

Eine Bewegung kann aber von einem Gesichtspunkte »unstabil» erscheinen, obgleich sie, von einem anderen Gesichtspunkte betrachtet, als *»stabil»* charakterisiert werden kann. Dies ist eben mit der Rotationsform 3) der Fall. Um sie zu studieren, muss man einen anderen Ausgangspunkt wählen, als denjenigen, der sich für der Mond am meisten angemessen erwies.

2. Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in Meddel. N:o 31 (»Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems»). Anstatt aber die Achse z, welche den Trägheitsmoment C entspricht, mit der gewöhnlich s. g. Rotationsachse zusammenfallen zu lassen, wie für den Mond und die Planeten das Einfachste ist, lasse ist die im Körper feste z-Achse *mit der gegen die Sonne gerichtete Hauptträgheitsachse* zusammenfallen. Ich nehme an, dass die Rotation eine »gebundene» ist, und dass die z-Achse also genähert mit dem Radius Vector des Planeten zusammenfällt. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial u_i}; \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \alpha_i}, \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

wo

$$H' = \frac{\alpha_2^2}{2C} + k_1 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \sin^2 u_1 + k_2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \cos^2 u_1 + \tag{2}$$
$$+ \alpha_3 \frac{d\lambda}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} [k_1 A \cos^2 \alpha + k_2 B \cos^2 \beta],$$

wo die Werte von $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ in Meddel. N:o 33 angeführt sind.[1]

Das Problem kann in dieser allgemeinen Form behandelt werden. Die Bewegungsformen können aber ziemlich verwickelt werden, und es scheint angemessen hier einige vereinfachende Annahmen zu machen. Würden etwa die Beobachtungen zeigen, dass dieser Rotationsfall wirklich vorkommt, kann man eine umständlichere Untersuchung vornehmen.

Ich nehme also an, 1) dass der Planet sich in einem *Kreis* um die Sonne bewegt, 2) dass der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der Trägheitsachse z klein ist, 3) dass der Winkel ε zwischen der Zentralachse und der Achse der Ekliptik nahe gleich 90° ist. Endlich nehme ich 4) an, dass die Trägheitsmomente A und B gleich sind.

Es ist dann angemessen folgende neue Veränderlichen einzuführen:.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_2 &; \quad \eta_1 &= u_1 + u_2, \\ \xi_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 (1 - \cos \theta_0); &\quad \eta_2 &= -u_1, \\ \xi_3 &= \alpha_3 = -\alpha_2 \cos \varepsilon &; \quad \eta_3 &= u_3 - \lambda = u'_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Die neuen Veränderlichen — $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ — sind auch kanonisch. Die Grössen ξ_2 und ξ_3 können als klein betrachtet werden.

Da nun $k_1 = k_2$ ist, erhalten wir

---

[1] Es ist in (1) $u_3 - \lambda$ statt u_3 eingeführt, weil dadurch die Länge λ des Planeten eliminiert wird. In (1) heisst deswegen die dritte Winkelveränderliche u'_3, die gleich $u_3 - \lambda$ ist. Man vergleiche die Formeln (3).

$$H' = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{AC}\left(\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_2^2\right) + n\xi_3 + \frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\gamma, \tag{4}$$

wo n die mittlere Bewegung des Planeten bezeichnet, und die Masse des Planeten im Verhältnis zur Sonnenmasse vernachlässigt wird. Für $\cos\gamma$ hat man nach Meddel. N:o 33 den Wert

$$\begin{aligned}\cos\gamma = \sin\theta_0\,[\sin u_2 \cos u'_3 - \cos u_2 \sin u'_3 \cos\varepsilon] - \\ - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin u'_3.\end{aligned} \tag{5}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{1}{2}\sin\theta_0\,[\sin(u_2 - u'_3) + \sin(u_2 + u'_3) + \\ &\quad + (\sin(u_2 - u'_3) - \sin(u_2 + u'_3))\cos\varepsilon] - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin u'_3 \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta_0\,[\sin(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3) + \sin(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + \\ &\quad + (\sin(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3) - \sin(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3))\cos\varepsilon] - \\ &\quad - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin\eta_3.\end{aligned}$$

Es muss bemerkt werden, dass die Differentialgleichungen (1) offenbar das Integral

$$\alpha_1 = \text{Konstans}$$

besitzen. Hierdurch lassen sich die Bewegungsgleichungen auf 2 Freiheitsgrade reduzieren. Für den hier vorliegenden Zweck ist aber diese Reduktion nicht notwendig.

Es ist indessen vorteilhaft noch eine Transformation auszuführen. Wir setzen

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2\xi_2}\cos\eta_2, \\ v &= \sqrt{2\xi_2}\sin\eta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Da

$$2\xi_2 = 4\xi_1 \sin^2\frac{1}{2}\theta_0,$$

$$4\xi_1 - 2\xi_2 = 4\xi_1 \cos^2\frac{1}{2}\theta_0,$$

hat man

$$\xi_1 \cos\theta_0 = \xi_1 - \xi_2,$$
$$\xi_1 \sin\theta_0 = \sqrt{2\xi_2}\,\sqrt{\xi_1}\,\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}},$$

und folglich

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}}{2\sqrt{\xi_1}}\Big[u\sin(\eta_1-\eta_3)+v\cos(\eta_1-\eta_3)+$$
$$+u\sin(\eta_1+\eta_3)+v\cos(\eta_1+\eta_3)-\frac{\xi_3}{\xi_1}(u\sin(\eta_1-\eta_3)+$$
$$+v\cos(\eta_1-\eta_3)-u\sin(\eta_1+\eta_3)-v\cos(\eta_1+\eta_3)\Big]-$$
$$-\left(1-\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}}\sin\eta_3.$$

Dieser Ausdruck ist genau und gilt für alle Annahmen über die Integrationskonstanten. Indessen werden wir nun die Grössen

$$\frac{u}{\sqrt{\xi_1}},\ \frac{v}{\sqrt{\xi_1}}\ \text{und}\ \frac{\xi_3}{\xi_1}$$

als kleine Grössen betrachten und die dritte Potenz derselben vernachlässigen.

Man hat dann

$$\cos^2\gamma =$$
$$=\frac{1}{4\xi_1}[u^2(\sin^2(\eta_1-\eta_3)+\sin^2(\eta_1+\eta_3)+2\sin(\eta_1-\eta_3)\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v^2(\cos^2(\eta_1-\eta_3)+\cos^2(\eta_1+\eta_3)+2\cos(\eta_1-\eta_3)\cos(\eta_1+\eta_3))$$
$$+2uv(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3))(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3))]$$
$$+\left(1-\frac{2\xi_2}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}\right)\sin^2\eta_3$$

$$-\frac{\sin\eta_3}{\sqrt{\xi_1}}\Big[\ u(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3))$$
$$-\frac{\xi_3}{\xi_1}(u(\sin(\eta_1-\eta_3)-\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)-\cos(\eta_1+\eta_3))\Big]$$

oder

$$\cos^2\gamma =$$

$$= \frac{1}{4\xi_1}\Big[(u^2+v^2)(1+\cos 2\eta_3)$$

$$-(u^2-v^2)\left(\frac{1}{2}\cos 2(\eta_1-\eta_3)+\frac{1}{2}\cos 2(\eta_1+\eta_3)+\cos 2\eta_1\right)$$

$$+uv(\sin 2(\eta_1-\eta_3)+\sin 2(\eta_1+\eta_3)+2\sin 2\eta_1)\Big]$$

$$+\left(1-\frac{u^2+v^2}{\xi_1}-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\eta_3\right)$$

(7)

$$-\frac{\sin\eta_3}{\sqrt{\xi_1}}\Big[\quad u(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3))$$

$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3))$$

$$-\frac{\xi_3}{\xi_1}(u(\sin(\eta_1-\eta_3)-\sin(\eta_1+\eta_3))$$

$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)-\cos(\eta_1+\eta_3))\Big].$$

Wird derjenige Teil von H', der nicht mit n^2 multipliziert ist, mit H_0 bezeichnet, so hat man

$$(8)\qquad H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C}+\frac{C-A}{2AC}\left[\xi_1(u^2+v^2)-\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2\right]+n\xi_3$$

und dann ist

$$(9)\qquad H' = H_0+\frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\gamma.$$

In der ersten Annäherung werden wir das zweite Glied in (9) vernachlässigen.

Unsere kanonischen Veränderlichen sind

$$\xi_1,\ \eta_1$$
$$u,\ v$$
$$\xi_3,\ \eta_3.$$

Da in H_0 weder η_1 noch η_3 vorkommt, hat man in der ersten Annäherung

$$\xi_1 = \text{Konstante} = \xi_1^0$$
$$\xi_3 = \text{Konstante} = \xi_3^0 .$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial v}; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial u}$$

findet man aber, da H_0 eine Funktion von $u^2 + v^2$ ist, so dass

$$u \frac{\partial H_0}{\partial v} - v \frac{\partial H_0}{\partial u} = 0$$

ist, dass

$$u^2 + v^2 = \text{Konstante} = 2\xi_2^0$$

ist.

Wir können also hier zweckmässig die Veränderlichen

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3$$

behalten, so dass

$$H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{AC}\left(\xi_1 \xi_2 - \frac{1}{2}\xi_2^2\right) + n\xi_3$$

ist, und erhalten zur Bestimmung von η_1, η_2 und η_3 die Gleichungen

$$\frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\xi_1}{C} - \frac{C-A}{AC}\xi_2,$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{C-A}{AC}(\xi_1 - \xi_2),$$

$$\frac{d\eta_3}{dt} = -n,$$

wo für ξ_1 und ξ_2 rechter Seite die konstanten Werte ξ_1^0 und ξ_2^0 einzuführen sind. Die Grössen η_1, η_2 und η_3 wachsen also proportional der Zeit und zwar verändert sich η_2 sehr langsam. Der Winkel η_3 wächst in einer Periode gleich der Umlaufszeit des Planeten um 360°. Wir können also schreiben

$$\eta_1 = \nu_1 t + c_1,$$
$$\eta_2 = \nu_2 t + c_2,$$
$$\eta_3 = \nu_3 t + c_3,$$

wo

(10)
$$\nu_3 = - n$$

ist.

Für u und v, bekommen wir die Ausdrücke

$$u = \sqrt{2\xi_2^0} \cos (\nu_2 t + c_2),$$
$$v = \sqrt{2\xi_2^0} \sin (\nu_2 t + c_2).$$

Nach der Methode der Störungstheorie können nun die Glieder, die vom zweiten Teil von H' herrühren, berücksichtigt werden. Wir setzen also

(11)
$$\xi_i = \xi_i^0 + \varDelta \xi_i,$$
$$\eta_i = \nu_i t + c_i + \varDelta \eta_i.$$

Die »Störungsfunktion», die wir mit H_1 bezeichnen, hat dann den Ausdruck

$$H_1 = \frac{3}{2} n^2 (C - A) \cos^2 \gamma.$$

Zur Erhaltung der *secularen* Glieder bezeichnen wir den von kurzperiodischen Gliedern unabhängigen Teil von H_1 mit $[H_1]$. Es ist dann

(12)
$$[H_1] = - \frac{3}{4} n^2 (C - A) \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} + \frac{\xi_3^2}{2\xi_1^2}\right),$$

welche Gleichung zeigt, *dass in ξ_1, ξ_2 und ξ_3 keine sekularen Störungen auftreten.* Dagegen werden die Grössen η_1, η_2 und η_3 kleinen sekularen Störungen unterliegen. Im Besonderen wird für η_3

(13)
$$[\varDelta \eta_3] = \frac{3}{4} n^2 (C - A) \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}} t$$

Ausser den sekularen Störungen kommen periodische Störungen vor, die ich hier nicht näher untersuchen werde.

Ich will zunächst die Form der Ausdrücke für die EULER'schen Winkel bestimmen. Da hier $\varepsilon > \theta_0$, hat man nach Meddel. N:o 31, Formel (25)

$$\varphi + u_1 = -u_2 + \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin s u_2 + \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin s u_2;$$

$$\psi + u_3 = -\sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin s u_2 + \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin s u_2 .$$

Sehen wir von den periodischen Gliedern ab, so ist also

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} \varphi &= -u_1 - u_2, \\ \psi &= -u_3 \end{aligned}$$

Man hat aber nach (3)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\eta_2 , \\ u_2 &= \eta_1 + \eta_2, \\ u_3 &= \eta_3 + \lambda = \eta_3 + nt + c + 180°, \end{aligned}$$

wo $nt + c$ die mittlere Länge des Planeten bezeichnet. Von den sekularen Störungen abgesehen ist aber nach dem Obigen

$$\eta_3 = -nt + c_3,$$

so dass mithin nach (14)

$$\text{(15)} \qquad \psi = \text{Konstans}$$

ist. Folglich hat die Rotationsachse z, unter den gegebenen Voraussetzungen eine unveränderliche Lage im Raum. Die sekularen Störungen bewirken indessen, dass der Winkel ψ langsam um den Wert

$$\text{(16)} \qquad \frac{3}{4} n^2 (C - A) \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}}\, t$$

wächst.

Wir sind also zum Schluss gekommen, dass unter den gemachten Voraussetzungen — θ_0 klein, ε nahe gleich 90° — *keine gebundene Rotation vorkommen kann.* Es sei dann, dass der Unterschied zwischen den beiden Trägheitsmomenten C und A so gross ist, dass der Koeffizient von t in (16) mit der mittleren Bewegung n des Planeten vergleichbar sei, was aber für die betreffenden Planeten als höchst unwahrscheinlich betrachtet werden muss.

3. Statt der Bedingungen 2) und 3) oben nehme ich nun an, dass

2) der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der Trägheitsachse z — welche vom Anfang an gegen die Sonne gerichtet ist — nahe gleich 90° ist;

2) dass der Winkel ε zwischen der Zentralachse und der Achse der Ekliptik klein ist.

Die Rotation findet dann hauptsächlich um eine zur Ekliptik senkrechten Achse statt; ausserdem ist eine langsame Drehung um die gegen die Sonne gerichtete z-Achse vorhanden.

Ich führe nun die neuen Veränderlichen

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \alpha_2; && \eta_1 = u_2 - u'_3, \\ &\xi_2 = \alpha_1 = \alpha_2 \cos\theta_0; && \eta_2 = u_1, \\ &\xi_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2(1 - \cos\varepsilon); && \eta_3 = u'_3 = u_3 - \lambda, \end{aligned}$$

ein, welche Koordinaten auch kanonisch sind, wie man am leichtesten mit dem POINCARÉ'schen Kriterium

$$\Sigma\,\xi\,\eta = \Sigma\,\alpha\,u$$

kontrollieren kann.

Wir setzen wie vorher

$$H' = H_0 + H_1$$

und erhalten

$$H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{2AC}(\xi_1^2 - \xi_2^2) + n(\xi_3 - \xi_1), \tag{18}$$

$$H_1 = \frac{3}{2} n^2 (C - A)\cos^2\gamma. \tag{18'}$$

Zuerst betrachte ich die Gleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3),$$

welche für ξ_1, ξ_2 und ξ_2 konstante Werte geben, und für η_1, η_2, η_3 lineare Funktionen der Zeit. Wir schreiben demnach die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \xi_1^0; && \xi_2 = \xi_2^0; && \xi_3 = \xi_3^0; \\ &\eta_1 = \nu_1 t + c_1; && \eta_2 = \nu_2 t + c_2; && \eta_3 = \nu_3 t + c_3, \end{aligned}$$

und zwar ist

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -\frac{\xi_1^0}{C} - \frac{C-A}{AC}\xi_1^0 + n, \\ \nu_2 &= \qquad \frac{C-A}{AC}\xi_2^0, \\ \nu_3 &= -n. \end{aligned}$$

Nach Meddel. N:o 31 Formel (26), die hier für $\varepsilon < \theta_0$ zur Anwendung kommt, hat man bis auf periodische Glieder

$$\begin{aligned} \varphi &= \quad -u_1 \quad = -\eta_2, \\ \psi &= u_2 - u_3 = \eta_1 - \lambda. \end{aligned} \tag{19}$$

Wenn die z-Achse gegen die Sonne gerichtet bleiben soll, so muss in der ungestörten Bewegung $-\psi = \lambda \pm 90°$ sein und folglich darf η_1 kein sekulares Glied enthalten, sondern muss um $\pm$ 90° schwanken. Die Integrationskonstante ξ_1^0 muss also die Gleichung

$$\frac{\xi_2^0}{C}\left(1 + \frac{C-A}{A}\right) = n$$

befriedigen, so dass $\eta_1 \pm 90°$ klein bleibt.

Es fragt sich nun ob beim Hinzuziehen des Störungsglieds H_1 die Grösse η_1 klein bleiben kann.

Zunächst ist der Ausdruck für $\cos^2\gamma$ durch die Veränderlichen ξ_i und η_i zu bilden.

Man hat

$$\cos \gamma = \sin \theta_0 \left[\frac{1+\cos \varepsilon}{2} \sin (u_2 - u'_3) + \frac{1-\cos \varepsilon}{2} \sin (u_2 + u'_3) \right]$$
$$- \cos \theta_0 \sin \varepsilon \sin u'_3 ,$$

woraus

$$\cos^2 \gamma = \sin^2 \theta_0 \left[\left(\frac{1+\cos \varepsilon}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 (u_2 - u'_3) \right) + \right.$$
$$+ \left(\frac{1-\cos \varepsilon}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 (u_1 + u'_3) \right) +$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \sin (u_2 - u'_3) \sin (u_2 + u'_3) \right]$$
$$- \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varepsilon \left[\frac{1+\cos \varepsilon}{2} (\cos (u_2 - 2 u'_3) - \cos u_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\cos \varepsilon}{2} (- \cos (u_2 + 2 u'_3) + \cos u_2) \right]$$
$$+ \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varepsilon \sin^2 u'_3 .$$

Es wird sich empfehlen die Veränderlichen

$$p = \sqrt{2 \xi_3} \cos \eta_3 ,$$
$$q = \sqrt{2 \xi_3} \sin \eta_3$$

ein zuführen.

Man hat dann

$$2 \xi_3 = 4 \xi_1 \frac{1-\cos \varepsilon}{2} = p^2 + q^2 ,$$
$$4 \xi_1 \frac{1+\cos \varepsilon}{2} = 4 \xi_1 - (p^2 + q^2) ,$$
$$4 \xi_1^2 \sin^2 \varepsilon = (4 \xi_1 - (p^2 + q^2)) (p^2 + q^2) .$$

Weiter ist

$$\cos \theta_0 = \frac{\xi_2}{\xi_1} ; \ \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}} ,$$

und

$$u_2 = \eta_1 + \eta_3 ,$$
$$u'_3 = \eta_3 .$$

Man erhält dann

$$\cos\gamma = \frac{1}{4\xi_1}\sqrt{1-\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}}\,[(4\xi_1-(p^2+q^2))\sin\eta_1 + (p^2+q^2)\sin(\eta_1+2\eta_3)] - \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{\xi_1}}\sin\eta_3\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\xi_1}}\,.$$

Werden die Gliede dritter Ordnung vernachlässigt und wird auch $\cos\eta_1$ als eine kleine Grösse betrachtet, erhält man hieraus

$$\cos\gamma = \sin\eta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2. \tag{20}$$

Es ist also bis auf Glieder dritter Ordnung

$$\cos^2\gamma = \sin^2\eta_1 - \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2.$$

Für H' erhält man der Ausdruck

$$H' = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{2AC}(\xi_1^2-\xi_2^2) + n\left(\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\xi_1\right) + \frac{3}{2}n^2(C-A)\left[\sin^2\eta_1 - \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2\right]. \tag{21}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial\eta_1} = 3n^2(C-A)\sin\eta_1\cos\eta_1\,, \\ \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial\xi_1} = -\dfrac{\xi_1}{A}+n\,. \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = 0 = -\dfrac{\partial H'}{\partial\eta_2}\,, \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial\xi_2} = \dfrac{C-A}{A}\dfrac{\xi_2}{C} + 3n^2\dfrac{(C-A)}{\xi_1}\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1}+\dfrac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right) \end{cases} \tag{22*}$$

$$(22^{**})\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial q} = nq - 3n^2(C-A)\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1} + \dfrac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{\xi_1}} \\ \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial p} = -np. \end{cases}$$

Wir setzen nun

$$(23)\qquad \eta_1 = 90^\circ + y,$$

so dass die Gleichungen für ξ_1 und y lauten, wenn die höheren Potenzen von y vernachlässigt werden,

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = -3n^2(C-A)\,y. \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\xi_1}{A} + n, \end{cases}$$

welche Gleichungen die Integrale

$$(25)\quad \begin{cases} \xi_1 = An - An\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,F\cos\left(n\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,t + G\right), \\ y = F\sin\left(n\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,t + G\right). \end{cases}$$

besitzen.

Die Bewegung ist *stabil*, wenn

$$A > C$$

ist, d. h. *wenn der Planet gegen die Sonne verlängert ist.*

Man findet weiter, dass ξ_2 einer konstanten Wert hat. Die Gleichungen für p und q lauten

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = qn\left(1 - \dfrac{3(C-A)}{A}\right) - 3n\,\dfrac{(C-A)}{A}\,\dfrac{\xi_2}{\sqrt{An}}. \\ \dfrac{dq}{dt} = -np. \end{cases}$$

Wenn die Konstanten f, g_1, h_1, g_2, h_2 in geeigneter Weise bestimmt werden, haben die Integrale dieser Gleichungen die Form

$$p = \quad g_1 \cos(\nu t + h).$$
$$q = f + g_2 \sin(\nu t + h).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten erhalten wir die Gleichungen

$$(27) \qquad f n \left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) - 3n \frac{C-A}{A} \frac{\xi_2}{\sqrt{An}} = 0.$$

$$(28) \qquad \begin{cases} \nu g_1 + n\left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) g_2 = 0 \\ n g_1 + \nu g_2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung für ν ist also

$$\begin{vmatrix} \nu, & n\left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) \\ n, & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

oder

$$(29) \qquad \nu^2 = n^2 \left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right).$$

Der Wert von ν ist reell und nahe gleich n, p schwankt zwischen den Werten $-g_1$ und $+g_1$, q zwischen $f - g_2$ und $f + g_2$. Wir können g_1 und h als die Integrationskonstanten betrachten. Der Wert von f wird aus (27) erhalten und für g_2 erhält man die Gleichung

$$(30) \qquad g_2 = -\frac{n}{\nu} g_1.$$

Weiter bekommt man

$$p^2 + q^2 = 2\xi_3 = f^2 + g_1^2 \cos^2(\nu t + h) + g_2^2 \sin^2(\nu t + h) + \\ + 2 f g_2 \sin(\nu t + h),$$

welche Gleichung zeigt, dass ξ_3 und auch ε zwischen endlichen und zwar engen Grenzen schwanken. Die Zentralachse Z_0 bleibt also in der Nähe der Achse der Ekliptik.

Für die EULER'schen Winkel φ und ψ hat man, von periodischen Gliedern abgesehen, die Ausdrücke

$$\varphi = -u_1 \qquad = -\eta_2,$$
$$\psi = \quad u_2 - u_3 = \quad \eta_1 - \lambda.$$

Die Grösse η_1 schwankt nach (23) und (25) um den Wert 90° und man hat von periodischen Gliedern abgesehen

$$-\psi = \lambda - 90°,$$

so dass die Rotation gebunden und stabil ist.

Was η_2 betrifft, so hat man nach (22*)

$$(31) \qquad -\varphi = \eta_2 = \nu_2 t + c_2 + b \cos(\nu t + h),$$

wo

$$(31^*) \qquad \nu_2 = \frac{4(A-C)}{A}\frac{\xi_2}{C} + \frac{3n(A-C)}{A}\frac{f}{\sqrt{An}},$$

$$(31^{**}) \qquad b = -\frac{3n(A-C)}{A\nu}\frac{g_2}{\sqrt{An}}.$$

Die Grösse ν_2 gibt uns die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet sich, immer mit gebundener Rotation, um den Radius Vector dreht. Da

$$\xi_2 = \alpha_2 \cos\theta_0$$

und θ_0 einen nahe konstanten Wert in der Nähe von 90° hat, so ist ξ_2 klein. Dasselbe können wir nach (27) in Bezug auf den Wert von f annehmen, und da in ν_2 ausserdem die Differenz $A - C$ zwischen den Trägheitsmomenten als Faktor vorkommt, so muss diese Drehung eine sehr langsame sein.

4. Eine Vorstellung von der genäherten Grösse der Differenz $A - C$ könnte man vielleicht aus der Theorie der Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten erhalten. In der Mém. de l'Acad. de Montpellier 1849 hat ROCHE die Gleichgewichtsfigur eines Planeten (und Satelliten) mit gebundener Rotation untersucht. Er hat dabei folgende Werte für die Hauptachsen erhalten,[1] wo ich, wie oben, annehme, dass die Achse c gegen die Sonne gerichtet ist

[1] Man vergleiche TISSERAND Méc. cél. II s. 115.

$$\frac{c-a}{a} = \frac{5ma^3}{m'r^3} = \frac{4(b-a)}{a}, \tag{32}$$

wo m = Sonnenmasse, m' = Masse des Planeten, r = Radius der kreisförmigen Planetenbahn um die Sonne. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Figurachse a senkrecht zur Ekliptik steht, so dass keine Drehung des Planeten um den Radius Vektor stattfindet. In unserem hier behandelten Fall, muss $a = b$ gesetzt werden, und die ROCHE'sche Untersuchung findet keine direkte Anwendung. Ich werde indessen die Annahme machen, dass die Formel

$$\frac{c-a}{a} = \frac{5ma^3}{m'r^3} \tag{32*}$$

einen genäherter Wert für die Gleichgewichtsfigur des flüssigen Planeten gibt, auch wenn eine Drehung um den Radius Vektor stattfindet.

Der Quotient $a : r$ ist gleich dem scheinbaren Radius des Planeten von der Sonne aus gesehen. Ist ϱ gleich dem scheinbaren Radius des Planeten *von der Erde* aus gesehen, wenn der Planet sich in Konjunktion mit der Erde befindet, so ist

$$\frac{a}{r} = \frac{1-r}{r}\varrho.$$

Ich nehme für *Merkur* ($r = 0.387$) den LEVERRIER'schen Wert

$$\varrho_{☿} = 3''.34$$

an, und für die *Venus* ($r = 0.723$) den HARTWIG'schen Wert

$$\varrho_{♀} = 8''.83.$$

Man hat also

für *Merkur:*

$$\frac{a}{r} = 5''.29 = 0.00002571,$$

für *die Venus:*

$$\frac{a}{r} = 3''.38 = 0.00001641.$$

Setzt man weiter mit BACKLUND

$$\frac{m}{m_{☿}} = 9\,700\,000,$$

und nach LEVERRIER

$$\frac{m}{m_{♀}} = 410\,000,$$

so erhält man

für *Merkur:*

$$\frac{c-a}{a} = 10^{-6} \times 0.824,$$

und für *die Venus:*

$$\frac{c-a}{a} = 10^{-8} \times 0.906.$$

Die Abplattung der beiden Planeten sollten also, unter der gemachten Voraussetzung, dass die ROCHE'sche Formel hier Anwendung findet, und dass die Gleichgewichtsfigur eines *flüssigen* Planeten auch auf den festen Planeten übertragen werden kann, eine sehr geringe sein. Zwar wissen wir aus den entsprechenden Zahlen für den Mond, dass diese theoretische Abplattung in der Wirklichkeit viel vergrössert wird (beim Mond ung. 20 Mal). Wir können immerhin als wahrscheinlich annehmen, dass die tatsächliche Abplattung der Planeten eine sehr geringe ist, um so mehr da die Beobachtungen keine Abplattung angedeutet haben. Hierbei muss man zwar, wie schon bemerkt, in Betracht ziehen, dass die Verlängerung dieser Planeten gegen die Sonne sehr schwierig ist aus den Beobachtungen zu finden.

Da $a - c$ als Faktor in ν_2 (31) vorkommt, können wir schliessen, dass die Drehung der Planeten, wenn sie überhaupt vorkommt, sehr langsam vor sich geht.

5. Fasse ich die obige Untersuchung zusammen, so habe ich also folgende Resultate erhalten:

1) Die flutwirkende Kraft der Sonne auf die beiden Planeten Merkur und Venus ist viel geringer als die entsprechende Wirkung der Erde auf den Mond. Es liegt daher keine

zwingende Gründe vor bei diesen Planeten eine gebundene Rotation anzunehmen.

2) Wenn indessen bei diesen Planeten (oder bei einem derselben) gebundene Rotation vorkommt — was nicht ausgeschlossen ist — so kann diese *entweder* so beschaffen sein, wie bei unserem Monde, so dass die Rotationsachse eine im Körper und im Raume nahe unveränderliche Lage einnimmt; *oder* es kann gleichzeitig mit der gebundenen Rotation eine *Drehung um den Radius Vektor* des Planeten stattfinden. Die Lage der Rotationsachse ist dann zwar im Raum, nicht aber im Körper, nahe unveränderlich.

3) Die Drehung, welche im letzteren Falle stattfindet, geschieht äusserst langsam, so dass eine volle Umdrehung, um den Betrag von 360°, erst nach vielen Umläufen des Planeten um die Sonne vollendet wird. In den Ausdrücken für die Rotationselemente kommen zwei mit Integrationskonstanten multiplizierten Störungen vor, von denen die eine langperiodisch ist, die andere eine Periode hat, die unbedeutend kürzer als die Umlaufszeit des Planeten ist.



Tryckt den 26 juni 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:O 24.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

WIE EINE UNENDLICHE WELT AUFGEBAUT SEIN KANN

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 24.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 38

Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mitgeteilt am 11. März 1908.

1. In einem Aufsatz[1] vom Jahre 1896 habe ich die Frage von der Ausdehnung der Welt in Raum und Zeit besprochen und bin dabei, hauptsächlich aus astronomischen Gründen, zu dem Schlusse gekommen, dass die Welt in Raum als *endlich* angesehen werden muss. Ich sah damals keine Möglichkeit die Gründe gegen eine unendliche Ausdehnung der Welt zu beseitigen, obgleich diese Unendlichkeit der Welt (der Materie) mir von philosophischem Gesichtspunkte aus fast axiomatisch erschien. Erst vor einigen Wochen bin ich durch das Lesen des geistreichen Buches des Herrn E. E. FOURNIER D'ÀLBE mit dem Titel »Two new worlds» (London, 1907) zur Einsicht gekommen, dass die Lösung des Dilemmas in der Tat eine sehr einfache ist. Es zeigt sich, dass man dabei zu einigen für die astronomische Weltanschauung wichtigen Schlussfolgerungen geführt wird, die ich hier auseinander setzen will.

Zuerst stelle ich die Gründe für die endliche Ausdehnung der Welt zusammen.

Was die rein *empirischen* Tatsachen betrifft so finden wir:

[1] »Ist die Welt endlich oder unendlich in Raum und Zeit» in Archiv für systematische Philosophie, 1896.

1. Die statistischen Untersuchungen über die Fixsterne machen es sehr wahrscheinlich, dass *die Milchstrasse selbst eine endliche Ausdehnung besitzt.*

2. *Die Clusters und die Nebel liegen wahrscheinlich innerhalb der Milchstrasse.* Die Gründe hierfür sind die folgenden,

a) *Einige Nebel gehören offenbar mit Sternen zusammen*: Beispiele hierfür liefern der Andromedanebel, der Orionnebel. die Plejaden, die Kapwolken u. s. w.

b) *Die Nebelmassen sind öfters von sehr sternarmen Gegenden umgeben.* Es genügt in dieser Beziehung auf die bekannten Untersuchungen der beiden HERSCHEL und von MAX WOLF hinzuweisen.

c) *Die systematische Lage der Nebel zur Milchstrasse* gibt uns den sichersten Beweis, dass die Nebel mit der Milchstrasse zusammengehören. Clusters und Gasnebel liegen fast ausnahmslos in der Ebene der Milchstrasse, die unauflösbaren Nebel sind um den Pol der Milchstrasse gehäuft. Man vergleiche die Karten von WATERS in Monthly Not. of the R. Astr. Soc. 1894.

Wenn aber die Fixsterne und die Nebel sich innerhalb eines endlichen Raumes befinden, wo soll man dann nach Himmelskörpern ausserhalb unserer Milchstrasse suchen? Man könnte sich zwar vorstellen, dass, obgleich die grosse Mehrzahl der uns bekannten Nebel zur Milchstrasse gehören, doch verschiedene auch ausserhalb der Milchstrasse liegen, und zu diesen könnte eine unendliche Zahl aussergalaktischer Milchstrassen kommen, die unseren Fernrohren unsichtbar sind und bleiben.

Gegen diese sonst plausible Hypothese sprechen indessen zwei wichtige Sätze.

3. Erstens haben wir den bekannten Satz von OLBERS (Bode's Jahrbuch, 1826), den er l. c. so ausspricht: »Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander entfernt oder in Milchstrassen-Systeme verteilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und *dann müsste der ganze Himmel ebenso hell sein wie die Sonne.*»

Aus dieser Schwierigkeit könnte man sich etwa durch eine Absorption des Lichtes durch den Äther, oder durch Ansammlungen von dunkler Materie oder durch »unsichtbare» Milchstrassen u. dgl. auszuhelfen suchen. Hierzu kommen aber

4. Schwierigkeiten, die von dem *Newton'schen Gesetze herrühren*. Es ist SEELIGER, der zuerst hierauf aufmerksam gemacht hat (Astr. Nachr. No. 3273, 1895). Er zeigt, »dass das NEWTON'sche Gesetz, auf das unermesslich ausgedehnte Universum angewandt, auf unüberwindliche Schwierigkeiten und unlösbare Widersprüche führt, wenn man die im Weltall zerstreute Materie als unendlich gross ansieht.» Ich werde unten auf diese Frage zurückkommen.

Die Beweiskraft der unter 3. und 4. angeführten Argumente wäre vernichtet, wenn die Dichtigkeit der Sterne um so mehr abnimmt, je weiter wir in den Raum hinauskommen. Oder mit anderen Worten, die Sätze von OLBERS und SEELIGER würden — unter gewissen Bedingungen, zu denen wir später zurückkommen — keinerlei Hindernisse in den Weg legen, wenn zwar die Gesamtmasse im Universum unendlich gross,[1] aber *gleichzeitig die durchschnittliche Dichtigkeit verschwindend wäre*. Dies muss so verstanden werden, dass, wenn wir einen beliebigen Raum S nehmen und die entsprechende mittlere Dichtigkeit δ der innerhalb dieses Raumes befindlichen Materie berechnet, so soll δ eine Funktion der Dimensionen des Raumes S sein, und zwar so, dass mit unendlich wachsendem S die Dichtigkeit δ gegen Null geht.

Eine solche Anordnung der Materie im Weltraum lässt sich in unendlich vielen Weisen durchführen. Indessen ist diese Bedingung (von einer unendlich kleinen durchschnittlichen Dichtigkeit der Materie) zwar notwendig, nicht aber hinreichend um die von OLBERS und SEELIGER hervorgehobenen Schwierigkeiten zu beseitigen. Ich werde im Folgenden unter einer speziellen Annahme über die Verteilung der Materie diese hinreichenden Bedingungen diskutieren.

Schon das berühmte Weltsystem von LAMBERT könnte hier zu Grunde gelegt werden. Ich finde, dass NEWCOMB darauf aufmerksam gemacht hat (»The Stars», S. 232), er sagt aber mit Recht, dass »modern developments show that there is no scientific basis for this conception, attractive though it be by its grandeur».

Zu LAMBERTS Zeit war es natürlich, dass man, um sich eine Vorstellung von dem Bau des Universums zu verschaffen, das Planetensystem als Modell benutzte. Wir wissen jetzt,

[1] Ich habe in dieser Beziehung im zitierten Aufsatz einen Fehlerschluss gemacht und gemeint, dass die Gesamtmasse endlich sein müsste.

dass diese Generalisierung nicht erlaubt ist. Für uns erscheint es mehr angemessen, dabei von der Milchstrasse als Typus eines Systems von Himmelskörpern auszugehen. Indem man sonst den LAMBERT'schen Grundgedanken beibehält, kommt man zum folgenden möglichen Bau des Universums, den ich von den früher erwähnten Gesichtspunkten aus näher untersuchen will.

Ich nehme an:

N_1 Sterne bilden zusammen eine Milchstrasse S_1,
N_2 Milchstrassen bilden zusammen ein Milchstrassensystem zweiter Ordnung S_2,
N_3 Milchstrassen zweiter Ordnung bilden zusammen ein Milchstrassensystem dritter Ordnung S_3,
u. s. w.

Die Individuen innerhalb jedes Systems betrachten wir als gleich gross und gleichförmig verteilt innerhalb des Systems. Die Begrenzung jedes Systems wird als kugelförmig angenommen.

Es sei weiter:

R_0 der Radius eines Fixsternes,
R_1 » » einer Milchstrasse S_1,
R_2 » » eines Systems S_2,
R_3 » » » » S_3
u. s. w.

Weiter bezeichne ich mit

ϱ_1 den Radius einer Kugel, innerhalb welcher durchschnittlich *ein* Fixstern vorkommt,
ϱ_2 den Radius einer Kugel, innerhalb welcher durchschnittlich *eine* Milchstrasse vorkommt,
u. s. w.,

so dass zwischen den Grössen N_i, R_i und ϱ_i die Relation

$$N_i = \left(\frac{R_i}{\varrho_i}\right)^3 \tag{1}$$

besteht.

Der (mittlere) Abstand zwischen zwei Individuen des Systems S_i ist dann gleich $2\varrho_i$.

Wird endlich die Masse des Systems S_i mit M_i bezeichnet, so hat man — indem M_0 die Masse eines Fixsterns ist —

$$M_1 = N_1 M_0,$$
$$M_2 = N_2 M_1 = N_2 N_1 M_0,$$
$$M_3 = N_3 M_2 = N_3 N_2 N_1 M_0,$$
$$\dots\dots,$$

so dass allgemein

$$N_i = \frac{M_i}{M_{i-1}} \tag{2}$$

ist.

Die Radien R_1, R_2, R_3, ... der verschiedenen Systeme und die Abstände $2\varrho_1$, $2\varrho_2$, $2\varrho_3$, ... zwischen den Individuen in jedem System müssen so gewählt werden, dass die von Olbers und Seeliger hervorgehobenen Schwierigkeiten nicht mehr stattfinden. Dafür müssen gewisse Ungleichheiten erfüllt sein, die ich jetzt aufsuchen will. Ich werde die Relationen, die in einer solchen Welt erfüllt sein müssen, mit den Namen das *Olbers'sche* bezw. das *Seeliger'sche Kriterium* bezeichnen.

2. *Das Olbers'sche Kriterium.* Es sei

h_1	die	Helligkeit	eines Fixsternes		im	Abstand	ϱ_1,
h_2	»	»	einer Milchstrasse		»	»	ϱ_2,
h_3	»	»	eines Systems	S_2	»	»	ϱ_3,
h_4	»	»	»	» S_3	»	»	ϱ_4,

u. s. w.

Es sei weiter

H_1	die	Gesamthelligkeit	unserer Milchstrasse von der Erde aus gesehen,
H_2	»	»	desjenigen Systems S_2, zu welchem unsere Milchstrasse gehört,
H_3	»	»	desjenigen Systems S_3, zu welchem unsere Milchstrasse gehört,

u. s. w.

Es ist wichtig zu bemerken, dass, indem man diese Helligkeiten H_1, H_2, H_3 u. s. w. *nach der gewöhnlichen Methode der Integralrechnung* berechnet — was, wie ich annehme, hier der Fall ist —, bei der Berechnnng von H_1 die Helligkeit der Sonne versäumt wird, bei der Berechnung von H_2 die Helligkeit unserer Milchstrasse versäumt wird u. s. w. Man muss in der Tat sonst über Punktmannigfaltigkeiten von so zu sagen verschiedener Mächtigkeit integrieren. Hieraus folgt

aber, dass die Gesamthelligkeit H des ganzen Weltalls durch die Formel

(3) $$H = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots = \Sigma H$$

gefunden wird.

Die Grösse H_i lässt sich durch h_i und N_i ausdrücken. Ich berechne zuerst die Gesamthelligkeit H_1 aller Sterne, die zu unserer Milchstrasse gehören, indem ich annehme, dass unsere Sonne sich nahe dem Zentrum der Milchstrasse befindet.

Die Zahl der Sterne innerhalb einer Sphäre mit dem Radius r ist

$$\left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^3$$

und folglich die Zahl der Sterne, deren Abstand zwischen r und $r + dr$ liegt,

$$\frac{3r^2 dr}{\varrho_1^3}$$

Die Helligkeit eines Sternes im Abstande r ist aber, der Definition von h_1 gemäss, gleich

$$h_1 \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^2$$

und folglich hat man

(4) $$H_1 = \int_0^{R_1} \frac{3r^2 dr}{\varrho_1^3} \cdot h_1 \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^2 = h_1 \frac{3R_1}{\varrho_1}$$

oder nach (1)

(4*) $$H_1 = 3h_1 \sqrt[3]{N_1}\,.$$

Nimmt man beispielsweise für die Zahl N_1 der Sterne in unserer Milchstrasse den Wert

$$N_1 = 10^9$$

an, so ist also

$$H_1 = 3000\, h_1\,.$$

Die Grösse h_1 weicht nicht viel von der Helligkeit eines Sternes der ersten Grösse ab,[1] und wir finden also, dass *die*

[1] Der Definition von ρ_1 gemäss liegen die uns am nächsten befindlichen Fixsterne im Abstande $2\rho_1$. Da diese Sterne ungefähr von der

Gesamthelligkeit aller Sterne in der Milchstrasse gleich der Helligkeit von 3000 Fixsternen erster Grösse ist.

Zur Aufstellung eines Konvergenzkriteriums der Reihe (3) braucht man eine Relation zwischen H_i und H_{i+1}.

Die Gesamthelligkeit der Milchstrasse von der Erde aus gesehen ist nach (4*) gleich

$$H_1 = 3h_1 \sqrt[3]{N_1},$$

sie ist gleich der Helligkeit von $3\sqrt[3]{N_1}$ Fixsternen im Abstande ϱ_1 von der Erde. Würde die ganze Milchstrasse auf den Abstand ϱ_2 von uns versetzt werden, so sollte diese Helligkeit in der Proportion

$$\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$$

reduziert werden. Die Helligkeit einer Milchstrasse im Abstand ϱ_2 ist aber gleich h_2. Folglich ist

$$h_2 = H_1 \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}. \tag{5}$$

Weiter ist

$$H_2 = 3h_2 \sqrt[3]{N_2}$$

und

$$h_3 = H_2 \frac{\varrho_2^2}{\varrho_3^2},$$

Es bestehen also allgemein die Relationen

$$\begin{cases} H_{i+1} = 3h_{i+1} \sqrt[3]{N_{i+1}}, \\ h_{i+1} = H_i \left(\frac{\varrho_i}{\varrho_{i+1}}\right)^2. \end{cases} \tag{6}$$

Wird mittelst dieser Gleichungen h_{i+1} eliminiert, so erhält man

$$H_{i+1} = H_i 3 \sqrt[3]{N_{i+1}} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho_{i+1}}\right)^2.$$

Für die Konvergenz der Reihe (3) ist erforderlich, dass

ersten Ordnung sind, sollte h_1 oben eigentlich etwa viermal so gross genommen werden. Da aber wahrscheinlich N_1 etwas zu gross angenommen worden ist (vergleiche unten) so kommt doch H_1 genähert richtig aus.

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} < 1 .$$

Das OLBERS'sche Konvergenzkriterium lautet also

$$3\sqrt[3]{N_{i+1}}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_{i+1}}\right)^2 < 1 ,$$

oder

(7) $$\frac{\varrho_i}{\varrho_{i+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[6]{N_{i+1}}} .$$

Damit die Gesamthelligkeit des Weltalls endlich sei, ist also erforderlich, dass diese Relation zwischen den mittleren Abständen der Individuen in den Systemen S_i und S_{i+1} besteht.

Statt ϱ_i kann man hier R_i einführen. Wir erhalten dann statt (7)

(8) $$\frac{R_i}{R_{i+1}} < \frac{\sqrt[3]{N_i}}{\sqrt[3]{N_{i+1}}} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[6]{N_{i+1}}} = \frac{\sqrt[3]{N_i}}{\sqrt{3}\sqrt{N_{i+1}}} .$$

Es empfiehlt sich statt dieser Ungleichheiten eine Relation zwischen R_i und ϱ_{i+1} aufzustellen, weil diese Relation am leichtesten in anschaulicher Form zu erhalten ist. Wird mittelst der Gleichung

$$R_i = \varrho_i \sqrt[3]{N_i}$$

die Grösse ϱ_i aus (7) eliminiert, erhält man

$$\frac{R_i}{\varrho_{i+1}} < \frac{\sqrt[3]{N_i}}{\sqrt{3}\sqrt[6]{N_{i+1}}} .$$

Man sieht hieraus, dass die Zerstreuung der verschiedenen Systeme nicht sehr gross zu werden braucht, damit man eine endliche Gesamthelligkeit des Weltalls erhalten soll. Über die Zahl N_i der Individuen im System S_i ist es zwar nicht leicht plausible Hypothesen aufzustellen. Nimmt man aber an — was nicht unwahrscheinlich erscheint — dass

$$N_i = N_{i+1} ,$$

so findet man, dass das OLBERS'sche Kriterium erfüllt ist, wenn man

(9) $$\frac{R_i}{\varrho_{i+1}} < \frac{\sqrt[6]{N_{i+1}}}{\sqrt{3}}$$

hat, so dass die verschiedenen Systeme sogar in einander hineingreifen können, ohne dass man eine sehr grosse Helligkeit des Himmels zu erhalten braucht. Ich werde später Kriterien ableiten, welche eine grössere Zerstreuung der Systeme erfordern.

3. *Das Seeliger'sche Kriterium.* Ich betrachte einen Fixstern $S_0^{(0)}$, der an der Grenze einer Milchstrasse $S_1^{(0)}$ liegt. Ich nehme weiter an, dass diese Milchstrasse an der Grenze eines Fixsternsystems zweiter Ordnung $S_2^{(0)}$ liegt, dass $S_2^{(0)}$ an der Grenze eines Systems $S_3^{(0)}$ liegt u. s. w. Wie gross ist die Anziehung, welche diese sämtlichen Systeme auf den Stern $S_0^{(0)}$ ausüben?

Die Attraktion der Milchstrasse auf $S_0^{(0)}$ ist gleich

$$\frac{M_1}{R_1^2},$$

wenn die Attraktionskonstante gleich Eins gesetzt wird. Die Attraktion des Systems $S_2^{(0)}$ auf $S_0^{(0)}$ ist — von der eben berechneten Attraktion der in $S_2^{(0)}$ gelegenen $S_1^{(0)}$ abgesehen — gleich

$$\frac{M_2}{R_2^2},$$

u. s. w., so dass die Gesamtattraktion auf $S_0^{(0)}$ gleich

$$\frac{M_1}{R_1^2} + \frac{M_2}{R_2^2} + \frac{M_3}{R_3^2} + \cdots$$

ist, welche Summe so lange fortgesetzt wird, wie die gemachten Voraussetzungen bestehen. Für die Konvergenz der Reihe ist erforderlich, dass

$$\frac{M_{i+1}}{R_{i+1}^2} < \frac{M_i}{R_i^2}$$

ist, oder nach (2)

(10) $$\frac{R_i}{R_{i+1}} < \frac{1}{\sqrt{N_{i+1}}},$$

welche Ungleichheit zwischen den Radien der verschiedenen Systeme bestehen muss. Ist sie erfüllt so ist die Gesamt-

attraktion des Weltalls auf den betreffenden Fixstern endlich. Sie sagt aus, dass die Attraktion des Systems $S_i^{(0)}$ auf die Masse M_0 grösser sein muss, als die Attraktion des höheren Systems $S_{i+1}^{(0)}$ auf dieselbe Masse. Führen wir ϱ_{i+1} statt R_{i+1} mittelst (1) ein, so lautet diese Relation

$$\frac{R_i}{\varrho_{i+1}} < \frac{1}{\sqrt[6]{N_{i+1}}}. \tag{11}$$

Nun ist aber $R_i : \varrho_{i+1}$ gleich dem Winkel, unter welchem ein Individuum des Systems S_{i+1} von dem nächstliegenden Individuum desselben Systems gesehen wird (streng ausgedrückt gleich der Tangens dieses Winkels). Wird das obige Kriterium auch für $i = 1$ angewandt, was ohne Zweifel erlaubt ist, so ist also der scheinbare Durchmesser der uns am nächsten liegenden Milchstrasse höchstens gleich

$$\frac{1}{\sqrt[6]{N_2}},$$

wo N_2 die Zahl der Milchstrassen im System $S_2^{(0)}$ ist. Würde man

$$N_2 = N_1 = 10^9$$

setzen, so wäre also *der scheinbare Durchmesser der nächsten Milchstrasse höchstens gleich 1°.8.* Dies ist aber unter den gemachten Voraussetzungen über N_2 ein sehr roher Maximalwert, da unter dieser Voraussetzung die anderen Milchstrassen eine merkbare Einwirkung auf die Bewegungen der Fixsterne in unserer Milchstrasse ausüben könnten, was ja unwahrscheinlich ist.

Ist indessen die Ungleichheit (11) erfüllt, so verschwinden die von SEELIGER hervorgehobenen Schwierigkeiten von selbst. Die Gesamtattraktion des Weltalls wird dann in jedem Punkt endlich und bestimmt und das NEWTON'sche Gesetz legt keine Hindernisse mehr in den Weg für eine einheitliche Auffassung des Weltsystems.

Die Ungleichheiten (9) und (11) sind eben Ungleichheiten und geben deswegen keine Aufschlüsse über die wirklichen Werte der Radien der verschiedenen Milchstrassensysteme. Es ist offenbar weit davon entfernt, dass man die betreffenden Ungleichheiten gegen Gleichheiten vertauschen kann. Es

gibt indessen einen Weg, auf welchem man zu einer genaueren Kenntnis dieser Radien gelangen kann. Dies geschieht mit Hilfe eines Satzes, den ich als das *Geschwindigkeitskriterium* bezeichnen will.

4. *Das Geschwindigkeitskriterium.* Die spektroskopischen Beobachtungen zeigen, dass die absolute Geschwindigkeit der Fixsterne selten 100 km in der Sekunde überschreitet. Die einzigen mir bekannten Fälle, wo man eine grössere Geschwindigkeit erhalten hat, ist bei gewissen sog. neuen Sternen, wo man es wahrscheinlich mit *Zusammenstössen* kosmischer Massen zu tun hat.[1] Was man immerhin sagen kann ist, dass Fixsterne mit Geschwindigkeiten, die Tausende oder gar Millionen Kilometer in der Sekunde betragen, den Astronomen völlig unbekannt sind. Wir sind deswegen berechtigt anzunehmen, dass das Weltall so eingerichtet ist, dass infolge der Anziehungen der Fixsternsysteme nicht beliebig grosse Geschwindigkeiten auftreten können.

Ich werde unter *Dispersion* — D — des Weltalls den Quotient $R_{i+1} : R_i$ zwischen den Radien zweier aufeinanderfolgenden Milchstrassensysteme verstehen. Je grösser D ist, desto kleiner ist die Anziehung, welche ein beliebiges System auf einen äusseren Körper ausübt und desto kleiner ist die Geschwindigkeit, die das System diesem Körper mitteilen kann.

Die Geschwindigkeit v_i eines Körpers, der von einer sphärischen Masse M_i angezogen wird, ist

$$v_i^2 = \frac{k^2 M_i}{r} + C,$$

wo r den Abstand des Körpers vom Mittelpunkt der Masse M_i bezeichnet. Die Konstante C bezeichnet die Geschwindigkeit, welche der Körper in unendlicher Entfernung von M_i besitzt. Wir werden hier diese Geschwindigkeit gleich Null setzen. Wenn der Körper die Grenze des Systems S_i erreicht, hat man

$$v_i^2 = \frac{k^2 M_i}{R_i}. \tag{12}$$

Da $M_{i+1} = N_{i+1} M_i$ ist, so folgt hieraus, dass

[1] Hierzu kommt noch einige spektroskopische Doppeltsterne.

$$\frac{v_{i+1}}{v_i} = \sqrt{N_{i+1}} \sqrt{\frac{R_i}{R_{i+1}}} . \tag{13}$$

Würde man annehmen, dass das Weltall die kleinste Dispersion besitzen sollte, die mit dem SEELIGER'schen Kriterium vereinbar ist, also nach (10)

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \sqrt{N_{i+1}} ,$$

würde man also

$$v_{i+1} = v_i \sqrt[4]{N_{i+1}} \tag{14}$$

haben.

Ich werde die Geschwindigkeiten, die in einem solchen Weltsystem vorkommen können, berechnen. Ich nehme dabei an, dass

$$N_i = N_{i+1} = 10^9 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

Wird für die Einheiten der Abstände, der Massen und der Zeit das *Centimeter-Gramm-Sekunde* (C. G. S.) - System gewählt, hat man

$$k^2 = 6.60 \times 10^{-8}.$$

Weiter setze ich die Masse — M_0 — eines Fixsternes gleich der Sonnenmasse, so dass [1]

$$M_0 = 2.00 \times 10^{33} \text{ Gramm}$$

ist. Endlich nehme ich an, dass die Parallaxe eines Fixsternes im Abstande ϱ_1 eine Sekunde beträgt. Dann ist ($R_1 = 1000\, \varrho_1$)

$$R_1 = 149 \times 10^6 \times 10^5 \times 206000 \times 10^3$$
$$= 3.00 \times 10^{21} \text{ cm.}$$

Aus (12) erhält man dann folgenden Wert für die Geschwindigkeit v_1 eines Fixsternes, der von unendlicher Entfernung in unsere Milchstrasse hineinfällt.

---

[1] Man vergleiche den Aufsatz von Lord KELVIN in Philos. Magazin 1902, S. 5. Man findet in der betreffenden Zeitschrift mehrere Aufsätze von Lord KELVIN, wo die Bedeutung des Geschwindigkeitsausdruckes (12) für die Frage von der Ausdehnung des Universums untersucht wird.

(15) $$v_1 = 66.3 \text{ km/sek.}$$

Dieser Wert zeigt, dass der Wert, den ich für den Radius unserer Milchstrasse der Einfachheit wegen ($R_1 = 1000\,\varrho_1$) angenommen habe, ein wenig zu klein ist.[1] Wenn nämlich fremde Körper, die in unsere Milchstrasse hineindrängen, eine so grosse Geschwindigkeit wie 66 km in der Sekunde erworben haben, so müssten Geschwindigkeiten über 100 km in der Sekunde nicht so sehr selten sein. Für den jetzigen Zweck ist es aber nicht nötig die entsprechende kleine Änderung in unseren Annahmen vorzunehmen.

Für $N_i = 10^9$ erhält man aus (14)

$$v_{i+1} = 178\, v_i$$

Folglich hat die Geschwindigkeit eines Körpers, der in S_2 hineinfällt, den Wert

$$v_2 = 11\,800 \text{ km/sek.}$$

und weiter bekommt man

$$v_3 = \quad 2\,100\,000 \text{ km/sek.}$$

$$v_4 = 373\,000\,000 \text{ km/sek.}$$

u. s. w.

Man findet, dass eine solche Einrichtung des Weltalls nicht möglich ist, da hier und da in unsere Milchstrasse Körper eindringen würden, die eine Geschwindigkeit von mehreren Millionen Kilometer in der Sekunde besitzen müssten.

Die Dispersion des Weltalls muss also viel grösser sein als nach dem von dem SEELIGER'schen Kriterium bedingten Minimum erforderlich ist. Man muss in der Tat, um unendlich grosse Geschwindigkeiten im Weltall zu vermeiden, annehmen, dass die Grössen v_1, v_2, v_3, ... alle von derselben Grössenordnung sind, oder auch, dass

$$v_1 \geqq v_2 \geqq v_3 \geqq \ldots$$

Das Geschwindigkeitskriterium lautet demnach

$$\frac{M_i}{R_i} \geqq \frac{M_{i+1}}{R_{i+1}},$$

[1] Es ist auch möglich, dass N_1 etwas zu gross genommen worden ist.

oder, da $M_{i+1} = N_{i+1} M_i$ ist,

(16)
$$\frac{R_{i+1}}{R_i} \geqq N_{i+1}.$$

Führt man für R_{i+1} die Grösse ϱ_{i+1} ein, so lautet diese Ungleichheit

(16*)
$$\frac{R_i}{\varrho_{i+1}} \leqq \frac{1}{N_{i+1}^{2/3}}.$$

Für $i = 1$, $N_2 = N_1 = 10^9$ würde man

$$\frac{R_1}{\varrho_2} \leqq \frac{1}{10^6} = 0''.2$$

erhalten, d. h. *die uns am nächsten liegende Milchstrasse würde einen scheinbaren Durchmesser von höchstens 0''.2 haben.*

Es ist von Interesse die Helligkeit einer fremden Milchstrasse unter den gemachten Voraussetzungen zu berechnen. Wir haben früher gefunden, dass die Helligkeit der Milchstrasse gleich der Helligkeit von 3000 Sternen im Abstande ϱ_1 sind. Wird die Milchstrasse auf den Abstand ϱ_2 versetzt, so wird ihre Helligkeit h_2 nach (5)

$$h_2 = 3000\, h_1 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \leqq \frac{3000\, h_1}{N_2^2} = \frac{3\, h_1}{10^{15}}.$$

Zur Berechnung der entsprechenden *Grössenordnung* m der Milchstrasse kann man sich der Formel

$$h_2 = h_1\, 10^{-0.4\,(m-1)}$$

bedienen, wo — wie früher — vorausgesetzt wird, dass ein Fixstern im Abstande ϱ_1 einem Stern von der ersten Grössenordnung entspricht. Man erhält also für m die Gleichung

$$0.4\,(m-1) = 15 - \log 3 = 14.52,$$

also

$$m = 37.30.$$

Die Helligkeit der uns am nächsten liegenden fremden Milchstrasse würde also der Helligkeit eines Sternes von der 37ten Grössenordnung gleichkommen. Es wäre dann ausgeschlossen,

die Milchstrassen ausserhalb unseres Fixsternsystems mit unseren jetzigen Fernrohren zu beobachten.

Der Abstand zwischen den Milchstrassen würde nach der Gleichung (16*) kleiner ausfallen, wenn man annähme, dass die Zahl N_2 der Milchstrassen im System S_2 (bedeutend) kleiner wäre als die Zahl der Fixsterne in unserem Fixsternsystem. Plausible Hypothesen über die relative Grösse der Zahlen N_1, N_2, N_3, . . , sind aber nicht leicht aufzustellen.

Zusammenfassend kann man folgendes aussprechen:

Eine unendliche Welt kann in der folgenden Weise aufgebaut sein. Eine Zahl N_1 von Fixsternen bilden zusammen eine Milchstrasse S_1; N_2 Milchstrassen bilden in ähnlicher Weise ein System S_2; N_3 Systeme, die S_2 ähnlich sind, bilden zusammen ein System höherer Ordnung S_3 u. s. w. Es wird angenommen, dass die verschiedenen Systeme eine kugelförmige Begrenzung haben. Ist der Radius des Systems S_i gleich R_i, so muss zwischen den verschiedenen Radien die Relation

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} \geqq N_{i+1}$$

bestehen. Ist diese Relation erfüllt, so sind die von Olbers und Seeliger gefundenen Argumente gegen ein ins Unendliche ausgedehntes Universum nicht mehr stichhaltig. In einer so zusammengesetzten Welt können keine durch die Anziehung der kosmischen Systeme verursachten unendlich grossen Geschwindigkeiten auftreten. Nimmt man $N_2 = N_1 = 10^9$ an, so würde die nächste Milchstrasse einen scheinbaren Durchmesser von höchstens 0.2 Sekunden und eine Helligkeit besitzen höchstens gleich der eines Sternes von der 37ten Grössenordnung.



Tryckt den 19 juni 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK

UTGIFVET AF

K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM

BAND 4. N:O 27.

DAS PLANETARISCHE ROTATIONSPROBLEM

VON

C. V. L. CHARLIER



UPPSALA & STOCKHOLM

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
R. FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 27.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 39

Das planetarische Rotationsproblem.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Vorgelegt am 8. April 1908.

1. Die Rotation eines Planeten, der sich in einer festen Ebene um die Sonne bewegt und der von der Anziehung der Sonne in seiner Rotationsbewegung gestört wird, habe ich in Meddel. No. 32 als das planetarische Rotationsproblem bezeichnet. Ich werde dies Problem hier behandeln unter der Voraussetzung, dass die Bahnkurve des Planeten ein Kreis ist, und dass zwei Trägheitsmomente (A und B) des Planeten einander gleich sind. Die letztere Annahme ist, soviel man weiss, bei allen grossen Planeten (es sei denn, dass Merkur und Venus möglicherweise eine Ausnahme bilden könnten) sehr nahe erfüllt, so dass diese Voraussetzung tatsächlich der Natur entspricht.

Durch die Veränderlichen α_i und u_i des Meddel. No. 31 ausgedrückt hat man für die charakteristische Funktion die Form ($A = B$ angenommen)

$$H = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C - A}{A} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} + \frac{3}{2} n^2 (C - A) \cos^2 \gamma .$$

Hier ist, wenn die Bahnebene der Planeten als XY-Ebene gewählt wird,

$$\cos\gamma = \sin\theta_0 (\sin u_2 \cos (u_3 - \lambda) - \cos u_2 \sin (u_3 - \lambda) \cos\varepsilon) - \\ - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin (u_3 - \lambda) .$$

Die Grösse λ bedeutet die Länge der Planeten um 180° vermehrt. Sie ist eine Funktion der Zeit, die aus der Theorie der Planeten als bekannt vorausgesetzt werden kann. Geschieht die Bewegung in einem Kreis, hat man

$$\lambda = nt + \text{Konstante}.$$

Da λ immer in der Kombination $u_3 - \lambda$ vorkommt, kann man die Zeit aus der charakteristischen Funktion eliminieren, wenn man die neuen Veränderlichen

$$\alpha'_3 = \alpha_3 ; \quad u'_3 = u_3 - \lambda$$

einführt und die charakteristische Funktion

$$H' = H + \alpha_3 \frac{d\lambda}{dt} \tag{2}$$

benutzt. Die neuen Veränderlichen sind auch kanonisch.

Die Grösse $\cos\gamma$ schreibt man in der Form

$$\begin{aligned} \cos\gamma = & - \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin u'_3 \\ & + \sin\theta_0 \frac{1 + \cos\varepsilon}{2} \sin (u_2 - u'_3) \\ & + \sin\theta_0 \frac{1 - \cos\varepsilon}{2} \sin (u_2 + u'_3) . \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\left\{ \begin{aligned} \cos^2\gamma = A_0 + A_1 \cos u_2 + A_2 \cos 2u_2 + A_3 \cos 2u'_3 \\ + A_4 \cos (u_2 - 2u'_3) + A_5 \cos (u_2 + 2u'_3) \\ + A_6 \cos (2u_2 - 2u'_3) + A_7 \cos (2u_2 + 2u'_2) \end{aligned} \right. \tag{3}$$

und hier ist

$$A_0 = \frac{1}{2} \sin^2\theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2\varepsilon - \frac{3}{4} \sin^2\theta_0 \sin^2\varepsilon ,$$

$$A_1 = \sin\theta_0 \cos\theta_0 \sin\varepsilon \cos\varepsilon ,$$

$$A_2 = - \frac{1}{4} \sin^2\theta_0 \sin^2\varepsilon ,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon + \frac{3}{4}\sin^2\theta_0\sin^2\varepsilon,$$

$$A_4 = -\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varepsilon\frac{1+\cos\varepsilon}{2},$$

$$A_5 = +\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varepsilon\frac{1-\cos\varepsilon}{2},$$

$$A_6 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0\left(\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\right)^2,$$

$$A_7 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\right)^2,$$

wo

$$\cos\theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\cos\varepsilon = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Nimmt man in H' nur die ersten zwei Glieder

$$\frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2C}$$

mit, so erhält man für α_1, α_2, α_3 und u_3 konstante Werte und für u_1 und u_2 die Ausdrücke

$$u_1 = \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_1}{C}t + \beta_1,$$

$$u_2 = -\frac{\alpha_2}{C}\left(1+\frac{C-A}{A}\right)t + \beta_2,$$

Die Zentralachse ist im Raum unveränderlich ($u_3 =$ Constans), beschreibt aber im Körper einen zirkularen Kegel um die z-Achse in einer Periode gleich

$$2\pi : \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_1}{C}.$$

Das ist die EULER'sche Periode. Wenn θ_0 sehr klein ist und folglich α_1 nahe gleich α_2 ist, so kann die Länge dieser Periode berechnet werden, wenn die Abplattung des Planeten $(C-A):A$ bekannt ist.

2. Die Bewegungsgleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u_1}, & \dfrac{du_1}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_1}, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u_2}, & \dfrac{du_2}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_2}, \\ \dfrac{d\alpha'_3}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u'_3}, & \dfrac{du'_3}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_3} \end{cases}$$

sind ganz von derselben Form, wie die Bewegungsgleichungen im Drei-Körper-Problem, nur etwas einfacher, weil *erstens* hier das Integral $\alpha_1 =$ Constans vorhanden ist, so dass das Problem auf zwei Freiheitsgrade reduziert werden kann, und *zweitens* die Störungsfunktion eine *endliche* Zahl von Gliedern enthält.

Ganz wie in der Störungstheorie können wir hier von *sekularen*, *langperiodischen* und *kurzperiodischen* Störungen sprechen.

Die sekularen Störungen werden erhalten, wenn man aus der Störungsfunktion die schnell veränderlichen Glieder ausscheidet und die übrigen beibehält. Das Argument u_2 kann als kurzperiodisch betrachtet werden. Es hat eine Periode gleich der Rotationszeit des Planeten. Der Teil von H', der zu sekularen Gliedern Veranlassung gibt und den ich mit $[H']$ bezeichne, hat also die Form

$$[H'] = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\,\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} + \alpha'_3 n + $$
$$+ \frac{3}{2} n^2 (C-A)(A_0 + A_3 \cos 2u'_3),$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right) - A_3,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\right).$$

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lassen sich auf einen Freiheitsgrad reduzieren und sind ganz von derselben Art wie die Gleichungen für das DELAUNAY'sche Problem. Sie können also streng integriert werden. Da einer meiner Zuhörer, Herr Dr. ZINNER, augenblicklich mit dieser Inte-

gration beschäftigt ist, so werde ich mich für den Moment nicht weiter damit aufhalten.

3. Die Bewegungsgleichungen (4) besitzen zwei strenge Integrale, nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} H' = h, \\ \alpha_1 = f, \end{array}\right. \tag{5}$$

wo h und f zwei Konstanten bezeichnen.

Ich werde untersuchen, inwiefern es möglich ist, aus diesen Integralen einige Schlüsse auf die Stabilitätsverhältnisse der Bewegung zu ziehen.

Wird die Konstante h_1 durch die Gleichung

$$C^2 h_1 = 2 C h + \frac{C-A}{A} \alpha_1^2 \tag{6}$$

eingeführt, so hat man

$$\left(1 + \frac{C-A}{A}\right) \alpha_2^2 + 2 C n \alpha_3 = C^2 h_1 - 3 n^2 C (C-A) \cos^2 \gamma .$$

Ich nehme an, dass beim Anfang der Bewegung die Rotationsgeschwindigkeit gross ist im Verhältnis zu n. Dann ist h_1 genähert gleich $\alpha_2^2 : C^2$ und somit positiv. Setzt man weiter

$$\left\{\begin{array}{l} n = n_1 \left(1 + \frac{C-A}{A}\right), \\ h_1 = h_2 \left(1 + \frac{C-A}{A}\right), \\ m_1 = \frac{3(C-A)}{C} n^2 : \left(1 + \frac{C-A}{A}\right) \end{array}\right. \tag{7}$$

und bemerkt, dass

$$\alpha_3 = - \alpha_2 \cos \varepsilon$$

ist, so hat man

$$\alpha_2^2 - 2 C n_1 \alpha_2 \cos \varepsilon = C^2 h_2 - C^2 m_1 \cos^2 \gamma .$$

Endlich setze ich

$$h_3 = h_2 - m_1 \cos^2 \gamma. \tag{8}$$

Die Grösse h_3 ist positiv und liegt zwischen den Grenzen $h_2 - m_1$ und h_2. Das Integral $H' = h$ hat nunmehr die Form

$$\alpha_2^2 - 2 C n_1 \alpha_2 \cos \varepsilon = C^2 h_3. \tag{9}$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf α_2 auf, so ist

$$\alpha_2 = C \left\{ n_1 \cos \varepsilon \pm \sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon} \right\}.$$

Da die beiden Wurzeln nicht ineinander übergehen können, wenn nicht die Grösse unterhalb des Wurzelzeichens verschwindet — was nicht vorkommen kann — so kann α_2 nicht das Zeichen wechseln. Ist beim Anfang der Bewegung α_2 positiv, hat man also

$$\alpha_2 = C \left\{ n_1 \cos \varepsilon + \sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon} \right\}.$$

Es lassen sich hieraus die Grenzwerte der Function α_2 ableiten. Es ist in der Tat

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \varepsilon} = - C \sin \varepsilon \left\{ n_1 + \frac{n_1^2 \cos \varepsilon}{\sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon}} \right\},$$

so dass α_2 den grössten Wert für $\varepsilon = 0$ und den kleinsten für $\varepsilon = \pi$ annimmt. Es ist also der

$$\text{Maximalwert von } \frac{\alpha_2}{C} = \sqrt{h_3 + n_1^2} + n_1,$$

$$\text{Minimalwert von } \frac{\alpha_2}{C} = \sqrt{h_3 + n_1^2} - n_1.$$

Nun ist $\alpha_2 : C$ nach Meddel. No. 31 gleich der Rotationsgeschwindigkeit ω um die Zentralachse. Die obigen Ausdrücke geben uns die Grenzwerte dieser Rotationsgeschwindigkeit. Die grösste Variation in der Rotationsgeschwindigkeit beträgt

$$2 n_1.$$

Für die *Erde* hat man

$$\frac{2 n_1}{\omega} = \frac{2}{366.24} = \frac{1}{183.12},$$

so dass die Rotationszeit der Erde, insofern die Einwirkung der Sonne in Betracht kommt, *immer zwischen den Werten 23 Stunden 56 Minuten und 24 Stunden 4 Minuten* (*Sternzeit*) *liegen muss.* Die aus den Veränderungen der Grösse $\cos^2 \gamma$ hervorgebrachte Variation in h_3 ist dabei vernachlässigt worden; man findet aber leicht, dass die Einwirkung dieses Gliedes verschwindend ist. Die Obliquität der Ekliptik — ε — darf dabei einen beliebigen Wert zwischen $-90°$ und $+90°$ annehmen.

Auch für θ_0 kann man Grenzwerte ableiten. Man hat nämlich

$$\cos \theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} .$$

Hier ist nach (5) α_1 eine Konstante und folglich ist (vorausgesetzt, dass bei irgend einem Zeitpunkt θ_0 sehr klein ist)

$$1 - \frac{n_1}{\omega_0} < \cos \theta_0 < 1 .$$

Für die *Erde* hat man den

$$\textit{Minimalwert} \text{ von } \cos \theta_0 = 1 - \frac{1}{366} = 0.9973 .$$

Der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der in der Erde festen z-Achse kann also — insofern die Einwirkung der Sonne auf die Rotation in Betracht kommt — niemals mehr als 4°,2 betragen.

Dagegen lassen sich nicht in dieser Weise Grenzen für die Grösse ε ableiten. Kann vielleicht infolge der Störungen diese Grösse alle Werte zwischen $+90°$ und $-90°$ annehmen?

Wir haben also gefunden, dass *die beiden Integrale $H' = h$ und $\alpha_1 = f$, die im planetarischen Rotationsproblem stattfinden, strenge Schlussfolgerungen in Bezug auf die absoluten Grenzen der Grössen α_2 und θ_0 zu ziehen erlauben.* Die Variationsgrenzen für ε werden aber hieraus nicht bestimmt.

4. Wir haben gefunden, dass die charakteristische Funktion H' im planetarischen Rotationsproblem die folgende Form hat

$$\begin{aligned} H' = A_0 &+ A_1 \cos u_2 + A_2 \cos 2u_2 \\ &+ A_3 \cos 2u'_3 + A_4 \cos (u_2 - 2u'_3) \\ &+ A_5 \cos (u_2 + 2u'_3) \\ &+ A_6 \cos (2u_2 - 2u'_3) + A_7 \cos (2u_2 + 2u'_3), \end{aligned}$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_7$ von α_1, α_2 und α_3 abhängen. Man leitet für dieselben die folgenden Ausdrücke ab:

$$A_0 = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\,\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} + \alpha_3 n +$$

$$+ \frac{3}{4} n^2 (C-A)\left[1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + 1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\right],$$

$$A_1 = \frac{3}{2} n^2 (C-A) \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_2} \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},$$

$$A_2 = -\frac{3}{8} n^2 (C-A)\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right),$$

$$A_3 = -\frac{3}{4} n^2 (C-A)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\right),$$

$$A_4 = -\frac{3}{4} n^2 (C-A) \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},$$

$$A_5 = \frac{3}{4} n^2 (C-A) \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},$$

$$A_6 = -\frac{3}{16} n^2 (C-A)\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2,$$

$$A_7 = -\frac{3}{16} n^2 (C-A)\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2.$$

Dies sind die strengen Ausdrücke für die Koeffizienten. In der Praxis können sie bedeutend vereinfacht werden, da $\alpha_2^2 - \alpha_1^2$ als eine sehr kleine Grösse angesehen werden kann.

In vielen Fällen ist es angemessen, die neuen Veränderlichen ξ_i und η_i durch die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} \xi_1 = \alpha_2 & , \quad \eta_1 = u_1 + u_2 - u'_3, \\ \xi_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 (1 - \cos \theta_0), & \quad \eta_2 = -u_1, \\ \xi_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 (1 - \cos \varepsilon) & , \quad \eta_3 = -u'_3 \end{cases}$$

einzuführen, welche Veränderlichen auch kanonisch sind.

Aus diesen Relationen erhält man

$$\frac{1-\cos\theta_0}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\frac{\xi_2}{2\xi_1},$$

$$\frac{1+\cos\theta_0}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=1-\frac{\xi_2}{2\xi_1},$$

$$\frac{\sin^2\theta}{4}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)=\frac{\xi_2}{2\xi_1}-\frac{\xi_2^2}{4\xi_1^2},$$

und

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=\frac{\xi_3}{2\xi_1},$$

$$\frac{1+\cos\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=1-\frac{\xi_3}{2\xi_1},$$

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{4}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)=\frac{\xi_3}{2\xi_1}-\frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}.$$

Die Ausdrücke der Koeffizienten A_i durch die Grössen ξ_i und η_i sind hieraus leicht zu erhalten.

5. Bei allen Planeten mit Ausnahme der Erde, die ich hier nicht in Betracht ziehe, ist der Winkel zwischen der Zentralachse und der Figurachse völlig unbekannt und man hat keine Veranlassung anzunehmen, dass sein Wert bei irgend einem Planeten bemerkbar ist. Wir können also $\theta_0=0$ annehmen; bemerken aber gleichzeitig, dass diese Annahme nicht *streng* erfüllt sein kann.

Die charakteristische Funktion für das planetarische Rotationsproblem lautet dann

$$(11)\qquad H_0=\frac{\xi_1^2}{2C}+n(\xi_3-\xi_1)+\frac{1}{2}m\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)(1-\cos 2\eta_3)$$

und man hat $\xi_1=\xi_1^0=$ Konstante, und

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_3}{dt}=\dfrac{\partial H_0}{\partial\eta_3}=m\dfrac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\dfrac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin 2\eta_3 \\ \dfrac{d\eta_3}{dt}=-\dfrac{\partial H_0}{\partial\xi_3}=-n-\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{1}{\xi_1}-\dfrac{\xi_3}{\xi_1^2}\right)(1-\cos 2\eta_3). \end{cases}$$

Die strenge Integration dieser Gleichungen habe ich an anderer Stelle ausgeführt. Hier werde ich die Integrationsmethode der Störungstheorie anwenden.

Hier ist m als eine kleine Grösse zu betrachten. In der ersten Annäherung erhalten wir

$$\xi_3 = \text{Konstante} = \xi_3^0$$
$$\eta_3 = -nt - c_3 = \eta_3^0 .$$

In der zweiten Annäherung erhalten wir

$$\xi_3 = \xi_3^0 - \frac{m}{2n}\frac{\xi_3^0}{\xi_1^0}\left(1 - \frac{\xi_3^0}{2\xi_1^0}\right)\cos 2(nt + c_3)$$
$$\eta_3 = -nt - c_3 - \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\xi_1^0} - \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}}\right)t + \frac{m}{4n}\left(\frac{1}{\xi_1^0} - \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}}\right)\sin 2(nt + c_3)$$

Ich setze

$$\xi_1^0 = C\omega,$$

wo ω die Rotationsgeschwindigkeit um die Zentralachse bezeichnet. Weiter führe ich statt ξ_3^0 den konstanten Wert der Obliquität ein.

$$\xi_3^0 = C\omega(1 - \cos\varepsilon),$$

woraus

$$2\xi_1^0 - \xi_3^0 = C\omega(1 + \cos\varepsilon),$$
$$\xi_1^0 - \xi_3^0 = C\omega\cos\varepsilon$$

so dass

$$\xi_3 = \xi_3^0 - \frac{m}{4n}\sin^2\varepsilon\, 2(nt + c_3)$$

$$\eta_3 = -nt - c_3 - \frac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon t + \frac{m\cos\varepsilon}{4nC\omega}\sin 2(nt + c_3).$$

Da

$$\eta_3 = u'_3 = u_3 - \lambda = u_3 - \odot$$

so können wir auch statt $nt + c_3$ die Sonnenlänge — $\odot$ — einführen.

$$(12)\quad \begin{cases} \xi_3 = \xi_3^0 - \dfrac{m}{4n}\sin^2\varepsilon\cos 2\odot, \\ \eta_3 = -\odot - \dfrac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon t + \dfrac{m\cos\varepsilon}{4nC\omega}\sin 2\odot. \end{cases}$$

In ξ_3 und η_3 kommt also ein periodisches Glied mit einer Periode gleich der halben Umlaufszeit des Planeten vor. Ausserdem hat man in η_3 ein sekulares Glied — die *Präzession*.

Wir leiten hieraus die Ausdrücke für die EULER'schen Winkel ab. Da $\theta_0 = 0$ ist, so hat man nach Meddel. No. 31 (25)

$$(13) \qquad \begin{cases} \varphi = - u_1 - u_2 = - \eta_1 - \eta_3 . \\ \psi = - u_3 \qquad = - \odot - \eta_3 . \end{cases}$$

Den Werth von η_1 finden wir aus der Gleichung

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_1}{dt} = - \dfrac{\partial H_0}{\partial \xi_1} = - \dfrac{\xi_1}{C} + n + \dfrac{m}{2} \dfrac{\xi_3}{\xi_1^2} \left(1 - \dfrac{\xi_3}{\xi_1}\right) (1 - \cos 2\eta_3) = \\ \qquad = - \omega + n + \dfrac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, (1 - \cos \varepsilon) \, (1 - \cos 2\eta_3) , \end{cases}$$

so dass

$$(14^*) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \text{Konstante} - \omega t + \odot + \dfrac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, (1 - \cos \varepsilon) \, t - \\ \qquad - \dfrac{m}{4C\omega n} \cos \varepsilon \, (1 - \cos \varepsilon) \sin 2 \odot . \end{cases}$$

Es ist somit

$$(15) \qquad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega t + \dfrac{m}{2C\omega} \cos^2 \varepsilon \, t - \dfrac{m}{4C\omega n} \cos^2 \varepsilon \sin 2 \odot , \\ \psi = \psi_0 + \dfrac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, t - \dfrac{m}{4C\omega n} \cos \varepsilon \sin 2 \odot , \end{cases}$$

wo φ_0 und ψ_0 zwei Konstanten bezeichnen. Es ist zu bemerken, dass man φ in der Form

$$(16) \qquad \varphi = \text{Konstante} + \omega t + (\psi - \psi_0) \cos \varepsilon$$

schreiben kann, welcher Ausdruck zeigt, dass die zwei letzten Glieder in φ (15) nur eine Projektion der Präzession in ψ darstellen.

Die Hauptglieder in der Theorie des planetarischen Rotationsproblems sind also in der Formel

$$\psi = \psi_0 + \frac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, t - \frac{m}{4C\omega n} \cos \varepsilon \sin 2 \odot$$

enthalten. Der Koeffizient in der *sekularen Präzession* hat den Wert

$$(17) \qquad \frac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{n^2}{\omega}\cos\varepsilon\,.$$

Das periodische Präzessionsglied hat eine Periode gleich der halben Umlaufszeit des Planeten um die Sonne. Der Koeffizient dieses Gliedes ist

$$(17^*) \qquad -\frac{3}{4}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{n}{\omega}\cos\varepsilon\,.$$

Ich berechne unten die numerischen Werte dieser Glieder für die grossen Planeten, insofern eine solche Berechnung möglich ist.

Die *Erde* nehme ich der Übersichtlichkeit wegen auch mit, obgleich für die Rotation dieses Planeten die Attraktion der Sonne nur eine untergeordnete Rolle spielt. Für die Abplattung nehme ich den Wert, den man aus den Beobachtungen über die Präzession der Äquinoktien erhalten hat (aus den Pendelbeobachtungen und aus der Theorie des Mondes hat man bekanntlich etwas grössere Werte für die Abplattung erhalten). Man hat also (TISSERAND: Méc. Cél. II, S. 441)

$$\text{Abplattung der Erde} = \frac{1}{305.6}\,.$$

Mit dem eingehaltenen Annäherungsgrad hat man auch diesen Wert für das Verhältnis $(C-A):C$. Weiter hat man

$$\omega = 366.24\,n\,,$$
$$n = 360^\circ = 1\,296\,000''\,,$$

wenn das tropische Jahr als Zeiteinheit eingeführt wird.

Hieraus erhält man

$$\psi_{♁} = \psi_0 + 15''.94\,t - 1''.268 \sin 2\odot\,.$$

Mars. Die Präzession dieses Planeten habe ich in Meddel. Serie II, No. 3, S. 12 berechnet. Ich nehme daraus die Werte

$$n = 689000'',$$
$$\omega = 464600000'',$$
$$\varepsilon = 24^\circ{,}87\,,$$
$$\frac{C-A}{C} = {}^1/_{220}\,,$$

und leitet hieraus die Formel

$$\psi_{♂} = \psi_0 + 6''{,}321\, t - 0''{,}946 \sin 2 \odot$$

ab.

Hier wie für die folgenden Planeten und für die Erde ist die Zeiteinheit ein tropisches Jahr. Unter ⊙ versteht man die Länge der Sonne vom Schwerpunkt des Planeten gesehen.

Für *Jupiter* nehme ich folgende Werte der Konstanten an

$$\frac{C-A}{A} = \frac{1}{15{,}73} \quad \text{(Bessel)}$$

$$\text{Rotationszeit} = 9^h\, 55^m\, 26^s$$

$$\varepsilon = 3^\circ\, 5' \quad \text{(Delambre)}.$$

Die Obliquität ist bekanntlich aus der Lage der Bahnebene des innersten (Galilei'schen) Satelliten bestimmt. Für die Rotationszeit hat man ja verschiedene Werte je nach der Wahl der Flecke. Diese Verschiedenheiten spielen indessen eine geringere Rolle für die vorliegende Frage, da der Wert der Abplattung ziemlich unsicher ist.

Aus diesen Werten erhält man

$$\psi_{♃} = \psi_0 + 0''{,}993\, t - 1''{,}051 \sin 2 \lambda_{♃}\,.$$

Für *Saturn* nehme ich für die Konstanten folgende Werte an:

$$\frac{C-A}{A} = \frac{1}{10.2} \quad \text{(Bessel, 1835)},$$

$$\text{Rotationszeit} = 10^h\, 16^m \quad \text{(A. Hall, 1877)},$$

$$\varepsilon = 28^\circ\, 10'{,}7 \quad \text{(Bessel, 1800)}.$$

Die Abplattung ist noch ziemlich unsicher. Die Obliquität ist aus der Lage des Ringes bestimmt.

Für die Präzession des Saturnekvators leitet man hieraus die folgende Formel ab

$$\psi_{♄} = \psi_0 + 0''.227\, t - 0''.531 \sin 2\lambda_{♄}\,.$$

Was die Planeten *Uranus* und *Neptun* betrifft, sind die Werte der Abplattung und der Rotationszeit noch zu unvollkommen bekannt um einen Schluss über die Bewegung der Äquatorsebenen der Planeten zu erlauben. In Bezug auf den Wert von ε werde ich in einer anderen Abhandlung zeigen, dass die Äquatorsebenen dieser Planeten mit grosser Wahrscheinlichkeit mit den Ebenen der Satellitenbahnen der betreffenden Planeten zusammenfallen.



Tryckt den 14 september 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM
N:o 40.

ÜBER DIE SEKULAREN STÖRUNGEN IM PLANETARISCHEN ROTATIONSPROBLEM

VON

DR. E. ZINNER



LUND 1909
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM
N:o 40.

Die sekularen Störungen im planetarischen Rotationsprobleme

von

ERNST ZINNER.

1. Bei der Anwendung der Methode der Variation der Konstanten auf das Rotationsproblem erhält man nach Charlier * für die charakteristische Funktion H den Ausdruck

$$H = T - U = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta}{2C\sin^2\theta} + \frac{p_2^2}{2C}$$
$$+ k_1\left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2\cos\varphi\right]^2$$
$$+ k_2\left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2\sin\varphi\right]^2$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\mu}{r_3}\left[Ak_1\cos^2\alpha + Bk_2\cos^2\beta\right]$$

Nimmt man zur Vereinfachung $A = B$ an und führt für p_1, p_2, p_3 die Grössen $\alpha_1\ \alpha_2, \alpha_3$ durch die Gleichungen

$$p_1 = \alpha_1$$
$$p_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$$
$$p_3 = \alpha_3$$

* Charlier. Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems. Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium. Nr. 31.

ein, so erhält man für H

$$(1) \quad H = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} + \frac{3}{2} n^2 (C-A) \cos^2 \gamma,$$

wo γ den Winkel zwischen dem Radius Vektor des störenden Körpers und der Hauptträgheitsachse bedeutet.

Die Grösse $\cos^2 \gamma$ enthält sekulare Glieder und solche, die mit den cosinus von Vielfachen von u_1, u_2 und u_3 multipliziert sind. Da das Rotationsproblem hier nur in Hinsicht auf einen störenden Körper betrachtet werden soll, so nehmen wir die Bahnebene des störenden Körpers als XY Ebene und können dann $u_3' = u_3 - \lambda$ einführen, wobei an Stelle von α_3 die neue kanonische Veränderliche α'_3 tritt. Zu dem Ausdruck für H kommt infolgedessen ein Glied $-\frac{d\lambda}{dt} \alpha'_3$ hinzu, wo wir unter Annahme einer gleichförmigen Bewegung des störenden Körpers $\frac{d\lambda}{dt} = n$ setzen können.

Nun sind u_1 und u_2 kurzperiodisch. Wir wollen uns aber darauf beschränken, das Problem mit Berücksichtigung der sekularen und langperiodischen Störungen zu behandeln, und deshalb die mit cosinus von u_1 und u_2 multiplizierten Glieder in $\cos^2 \gamma$ nicht mitnehmen.

Für $\cos^2 \gamma$ erhält man dann

$$\cos^2 \gamma = A_0 + A_3 \cos 2 u_3',$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right) - A_3$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right) \left[1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\right].$$

$$(2) \quad H = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} k_1 + \frac{3}{2} n^2 (C-A) \Big\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2} +$$

$$+\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\frac{2\alpha_2^2-3(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{2\alpha_2^2}\sin^2 u'_3\Big\} + n\alpha'_3$$

und es bestehen die kanonischen Differentialgleichungen

(3)
$$\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial u_1} \qquad \frac{du_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial u_2} \qquad \frac{du_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}$$
$$\frac{d\alpha'_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial u'_3} \qquad \frac{du'_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \alpha'_3}.$$

Da H die Zeit, u_1, und u_2 nicht enthält, so existieren die Integrale

$$H = C_1$$
$$\alpha_1 = \gamma_1$$
$$\alpha_2 = \gamma_2,$$

wo man nun sowohl α_1 als auch α_2 als Parameter betrachten und die singulären Verte von C_1 berechnen kann.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\alpha_2^2 - \alpha_1^2 = m_1$$

$$C_1 - \frac{\alpha_2^2}{2C} - \frac{m_1}{2C}k_1 - \frac{3}{4}\frac{m_1}{\alpha_2^2}n^2(C-A) = g.$$

Die Gleichung der Bahnkurve bekommt dann folgendes Aussehen

$$g = \frac{3}{2}n^2(C-A)\left(1-\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\frac{2\alpha_2^2-3m_1}{2\alpha_2^2}\sin^2 u'_3 + n\alpha'_3.$$

2. Hierbei tritt der erste singuläre Fall ein, wenn

$$2\alpha_2^2 - 3m_1 = o.$$

Als Lösungen der Differentialgleichungen (3) erhält man dann

$$\alpha'_3 = \alpha_3 = \gamma_3$$
$$u_1 = \omega\cos\theta_0\, k_1 t + c_1$$

$$u_2 = -\omega(1 + k_1)t + c_2$$

$$u_3 = u'_3 + \lambda = c_3.$$

Mit Hülfe von u_1, u_2 und u_3 erhält man nach Charlier* Ausdrücke für die Eulerschen Winkel φ und ψ. Man muss hierbei aber 2 Fälle unterscheiden, je nachdem ε grösser oder kleiner als θ_0 ist. θ_0 selbst ist für diesen singulären Fall gleich $54^0\ 44'\ 8''$, wie es sich aus $2\alpha_2^2 - 3m_1 = o$ ergibt.

I. $\varepsilon > \theta_0$

$$\varphi = -u_1 - u_2 = +\omega(0{,}433\, k_1 + 1)t - (c_1 + c_2)$$

$$\psi = -u_3 \qquad = -c_3$$

II. $\varepsilon < \theta_0$

$$\varphi = u_1 \qquad = -\omega \,.\, 0{,}577\, k_1 t - c_1$$

$$\psi = u_2 - u_3 = -\omega(1 + k_1)t + c_2 - c_3.$$

Im ersten Falle behält die Centralachse eine unveränderte Lage im Raume. Der Abstand der Zentralachse vonder mit dem Körper fest verbundenen z-Achse ist unveränderlich; dagegen wächst die Länge der Centralachse, bezogen auf die im Körper feste xy-Ebene, der Zeit proportional.

Im zweiten Falle bleibt der Abstand der Zentralachse von der im Raume festen Z-Achse und von der z-Achse unverändert. Die Länge der Centralachse, bezogen sowohl auf die im Raum feste XY-Ebene, als auch auf die im Körper feste xy-Ebene, wächst aber proportional der Zeit.

3. Zur weiteren Untersuchung nehmen wir

$$2\alpha_2^2 - 3m_1 \neq o$$

an und betrachten α_2 als Parameter. Die Gleichung (4) vereinfachen wir durch Einführung der Grössen

$$f = \frac{4\alpha_2^2}{3n^2(C - A)(2\alpha_2^2 - 3m_1)}g$$

* a. a. O. S. 13.

$$q_1 = \frac{\alpha_2}{3n\,(C - A)} \cdot \frac{2\alpha_2^2}{2\alpha_2^2 - 3m_1}.$$

Die Grösse q_1 ist proportional α_2. Durch Einsetzen von f und q_1 in die Bahngleichung erhält man

$$f = \left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right) \sin^2 u'_3 + 2q_1 \frac{\alpha'_3}{\alpha_2}. \tag{5}$$

Die singulären Werte der Integrationskonstanten f erhält man durch Elimination von α'_3 und u'_3 aus den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial u'_3} = o = \frac{\partial H}{\partial \alpha'_3}.$$

Es ist nun

$$\frac{\partial H}{\partial u'_3} = 2\left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right) \sin u'_3 \cos u'_3 \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha'_3} = -\frac{2\alpha'_3}{\alpha_2^2} \sin^2 u'_3 + \frac{2q_1}{\alpha_2}. \tag{6*}$$

Die Gleichung (6) hat die Wurzeln $u'_3 = o$, $u'_3 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha'_3 = \pm\,\alpha_2$. Setzen wir diese Werte in (6*) ein, so zeigt es sich, dass $u'_3 = o$ keinen Wert für α'_3 liefert.

Die einander entsprechenden Werte von u'_3 und α'_3 sind also

$$u'_3 = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha'_3 = \alpha_2 q_1$$

$$\alpha'_3 = \pm\,\alpha_2 \quad \sin u'_3 = \pm \sqrt{q_1},$$

Die entsprechenden singulären Werte für f sind dann

$$f = 1 + q_1^2. \tag{7}$$

$$f = \pm\, 2q_1, \tag{7*}$$

wo $f = -2q_1$ einem negativen q_1 entspricht, und zwar

sollen diese Diskriminanten mit D_1 und D_2 bezeichnet werden, also

$$D_1 = 1 + q_1^2 - f$$
$$D_2 = \pm 2q_1 - f.$$

Durch Einsetzen der singulären Werte für f in die Bahngleichung (5) bekommt man zur Berechnung der Bahnkurve die Formeln

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \alpha'_3 &= \alpha_2 \frac{q_1 \pm \cos u'_3 \sqrt{q_1^2 - \sin^2 u'_3}}{\sin^2 u'_3} \\ \alpha'_3 &= \alpha_2 \frac{2q}{\sin^2 u'_3} \mp \alpha_2 \\ \alpha'_3 &= \pm \alpha_2, \end{aligned}$$

d. h. die erste Formel für $f = 1 + q_1^2$ und die zweite und dritte Formel für $f = \pm 2 q_1$.

4. Zur Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{d\alpha'_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u'_3} \qquad \frac{du'_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha'_3},$$

nehmen wir α'_3 als q-Koordinate und u'_3 als p-Koordinate und erhalten dann die Hamilton Jacobische Gleichung

$$\text{(9)} \qquad f = \left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right) \sin^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha'_3}\right) + 2q_1 \frac{\alpha'_3}{\alpha_2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\text{(10)} \qquad u'_3 = \arcsin \sqrt{\frac{2q_1 \frac{\alpha'_3}{\alpha_2} - f}{\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2} - 1}}$$

und

$$W = \int \arcsin \sqrt{\frac{2q_1 \frac{\alpha'_3}{\alpha_2} - f}{\frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2} - 1}}\, d\alpha'_3.$$

Da die Gleichung $\cos \varepsilon = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ besteht und es darauf ankommt, die Grenzwerte von $\cos \varepsilon$ zu ermitteln, so führen wir die neuen kanonischen Veränderlichen $\alpha''_3 = \frac{\alpha'_3}{\alpha_2}$ und $u''_3 = \alpha_2 \,.\, u'_3$ ein.

Nach dem Hamilton-Jacobischen Theorem findet man α''_3 aus

$$\frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma_3 = \frac{\partial W}{\partial f} \tag{11}$$

als eine Funktion der Zeit.

Setzt man

$$X_1 = \alpha''^2_3 - 2q_1\alpha''_3 + f - 1 = (\alpha''_3 - \rho_1)(\alpha''_3 - \rho_2)$$

$$X_2 = \alpha''_3 - \frac{f}{2q_1} = \alpha''_3 - \rho_3,$$

so erhält man für die Gleichung (11) den Ausdruck

$$\frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma_3 = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{2q_1}} \int \frac{d\alpha''_3}{\sqrt{X_1 \,.\, X_2}}, \tag{12}$$

wo

$$\rho_1 = q_1 + \sqrt{D_1}$$

$$\rho_2 = q_1 - \sqrt{D_1}$$

$$\rho_3 = 1 - \frac{D_2}{2q_1}$$

ist.

Wie man also sieht, sind die Wurzeln durch die Diskriminanten D_1 und D_2 bestimmt. Die durch die Diskriminanten dargestellten Kurven sind die Parabel L_1 und die beiden sie berührenden Graden L_2 und L'_2 (siehe Fig. 1). Die Berührungspunkte besitzen die Koordinaten $f = +2$, $q_1 = +1$ und $f = +2$, $q_1 = -1$.

Die Diskriminante D_1 wechselt das Zeichen auf L_1, die Diskriminante D_2 auf L_2 und L'_2. Die beiden Kurven L_1 und L_2 teilen das Gebiet der positiven q_1 in die vier

Gebiete G_1, G_2, G_3 und G_4. — Von den durch die Kurven L_1 und L'_2 getrennten Gebieten gilt das Gleiche wie von den durch die Kurven L_1 und L_2 getrennten Gebieten. —

Es ist nun

in G_1:	D_1 positiv,	D_2 positiv
G_2:	D_1 » ,	D_2 negativ
G_3:	D_1 » ,	D_2 »
G_4:	D_1 negativ,	D_2 »

G_4 ist ein »verbotenes» Gebiet. Da infolge $D_1 < o$ die Wurzeln ρ_1 und ρ_2 imaginär sind, so ist X_1 positiv. Damit X_2 auch positiv sei, müsste $\alpha''_3 > \rho_3$ sein, was aber hier nicht stattfinden darf, da ρ_3 infolge $D_2 < 0$ grösser als 1 ist.

Was das Gebiet G_4 angeht, so kann α''_3 hier grösser als alle Wurzeln sein oder zwischen ρ_1 und ρ_2 liegen und kleiner als ρ_3 sein. Der erstere Fall kommt hier nicht in Betracht; denn ρ_1, die grösste unter den 3 Wurzeln, wird grösser als 1, wenn man von der singulären Linie L_2, wo $\rho_1 = 1$ ist, ausgehend in das Gebiet G_1 kommt. Es bleibt also nur der Fall übrig, wo α''_3 zwischen ρ_1 und ρ_2 liegt. Hier kann u''_3 alle Werte annehmen.

Die Gebiete G_2 und G_3, die $q_1 < 1$ und $q_1 > 1$ entsprechen, sind sich in ihrem Verhalten den Diskriminanten gegenüber gleich. Da D_2 negativ ist, muss α''_3 immer kleiner als ρ_3 sein. Damit nun das Produkt $X_1 . X_2$ positiv wird, muss α''_3 zwischen ρ_1 und ρ_2 liegen. Die Grösse $2u''_3$ kann hier nie gleich Null sein, sondern schwankt um den Wert $2u''_3 = 180^0$. In G_2 und G_3 besteht also Libration in u''_3 um den Wert $2\ u''_3 = 180^0$, d. h. es existiert gebundene Rotation. Das Gebiet G_3 kommt aber tatsächlich nicht in Betracht; denn für $q_1 > 1$ sind hier ρ_1 und ρ_2 grösser als ρ_3.

Um die Grenzwerte von cos ε kennen zu lernen, sind

unter Annahme eines bestimmten Wertes für q_1 für verschiedene Werte von f die Wurzeln berechnet.

4 a. $q_1 < 1$.

Es sei $q = 0{,}25$; dann erhält man

	f	ρ_1	ρ_2	ρ_3
1.)	— 0,5000	+ 1,50	— 1,00	— 1,00
2.)	0,0000	+ 1,28	— 0,78	0,00
3.)	+ 0,5000	+ 1,00	— 0,50	+ 1,00
4.)	+ 1,0000	+ 0,50	0,00	+ 2,00
5.)	+ 1,0625	+ 0,25	+ 0,25	+ 2,125

Die Punkte 1.) und 2.) liegen im Gebiet G_1, Punkt 3.) auf der Linie L_2, Punkt 4.) im Gebiet G_2 und Punkt 5.) auf L_1.

Zur besseren Anschauung der für α''_3 in Betracht kommenden Gebiete sind in Fig. 2 die die Wurzeln darstellenden Kurven für $q_1 = 0{,}25$ gezeichnet. Die nicht ausgezogenen Linien L_1 und L_2 stellen die singulären Kurven dar, die Parabel M_1 die Wurzeln ρ_1 und ρ_2 und die Grade M_2 die Wurzel ρ_3. Von den 8 Gebieten bekommt man nur in den 4 Gebieten F_1, F_4, F_6 und F_7 ein positives Produkt $X_1 \cdot X_2$. Von diesen 4 Gebieten kommen aber F_1, F_6 und F_7 nicht in Betracht, weil in ihnen α''_3 grösser, bez. kleiner als $+ 1_1$ bez. $- 1$ sein würde. Das Gebiet F_4 wird durch die singuläre Kurve L_2 in die beiden Gebiete F_{4a} und F_{4b}, die von ρ_1 und ρ_2 bez. ρ_3 und ρ_2 begrenzt sind und G_1 und G_2 entsprechen, geteilt. Auf der singulären Linie L_2 tritt Limitation auf, und auf ihr ist das Schwankungsbereich für ε am grössten, in unserem Falle nämlich von 60^0 bis 180^0. In F_{4b} kann ε alle Werte zwischen 0^0 und 180^0 annehmen in F_{4a} jedoch nicht; für $q_1 = 0{,}25$ nur die zwischen 60^0 und 180^0.

Für $q_1 = 0$ fallen L_2 und M_2 mit der α''_3-Achse zusammen. Der Scheitel der Parabel M_1 liegt dann auf der

f-Achse und zwar in der Entfernung $f = +1$ vom Koordinatenanfangspunkt. Das Gebiet F_{4b} ist verschwunden und es existiert nur noch F_{4a}, in dem ε alle Werte von 0^0 bis 180^0 annehmen kann und $2\,u''_3$ in Libration um 180^0 ist. Infolge $q_1 = \frac{\omega}{3n\,.\,k} \cdot \frac{A}{C} \cdot \frac{2\alpha_2^2}{2\alpha_2^2 - 3m_1}$ existiert also *nur* gebundene Rotation, wenn die ungestörte Rotationsgeschwindigkeit Null ist. Dies gilt aber bloss unter der Voraussetzung einer festen Gestalt der Planeten, die bei Änderung der Rotationsgeschwindigkeit sich nicht ändert.

An dieser Stelle möge zugleich einiges über den Zusammenhang zwischen der Rotationsrichtung und dem Winkel ε gesagt werden, ob nämlich α_2 $\left(\frac{\alpha_2}{C} = \omega\right)$ mit dem Wachsen von ε über 90^0 hinaus sein Zeichen ändert oder nicht. Bei der Beurteilung der Rotationsrichtung eines Planeten kann man die Projektion der Bewegung eines Oberflächenpunktes auf die Bahnebene oder auf die Äquatorebene des Planeten in Betracht ziehen. Bei Planeten mit kleinem ε ist es gleichgültig, auf welche Ebene man die Rotationsrichtung bezieht, nicht aber bei solchen Planeten, bei denen ε den Wert 90^0 überschreitet. Für diese müsste α_2, wenn man die Rotationsrichtung auf die Bahnebene bezieht, beim Übergange von ε über 90^0 sein Zeichen wechseln, was aber bei unserem Problem nicht stattfinden darf. In unserem Falle müssen wir daher zur Beurteilung des Vorzeichens von α_2 nur die Projektion auf die Äquatorebene berücksichtigen. Dann ändert sich beim Uberschreiten von 90^0 durch ε die Rotationsrichtung des Planeten nicht.

Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Bahnkurven selbst übergehen und zwar zuerst für $q_1 < 1$. Die Formeln (8) geben die 3 singulären Bahnkurven, die mit N_1, N_2 und N_3 bezeichnet werden mögen.

Die folgende Tabelle gibt die Werte für einzelne Punkte dieser Kurven.

u''_3	N_1	N_2	N_3
2° 358°	+ 408,38 + 2,13	+ 409,52	+ 1,00
6° 354°	+ 43,50 + 2,21	+ 44,76	.
10° 350°	+ 14,16 + 2,42	+ 15,83	.
14,5° 345,5°	+ 4,00 + 4,00	—	.
20° 340°	—	+ 3,27	.
30° 330°	—	+ 1,00	.
60° 300°	—	— 0,88	.
90° 270°	—	— 0,50	.
120° 240°	—	— 0,33	.
150° 210°	—	+ 1,00	.
160° 200°	—	+ 3,27	.
165,5° 194,5°	+ 4,00 + 4,00	—	.
170° 190°	+ 2,42 + 14,16	+ 15,88	.
174° 186°	+ 2,21 + 43,55	+ 44,76	.
178° 182°	+ 2,13 + 408,88	+ 409,52	+ 1,00

Alle in Betracht kommenden Bahnkurven können also nur innerhalb der singulären Kurve N_3 liegen. Die singuläre Kurve N_2 (siehe Fig. 3) stellt den Limitationsfall dar. Für eine beliebige Bahnkurve muss man die 4 Fälle

$$f > q_1^2 + 1$$

$$q_1^2 + 1 > f > + 2q_1$$

$$+ 2q_1 > f > - 2q_1$$

$$- 2q_1 > f$$

unterscheiden.

Unter Annahme $q_1 = 0{,}25$ ist für verschiedene Werte von f für einzelne Punkte der Bahnkurven α''_3 berechnet, wie die folgende Tabelle zeigt.

u''_3	$f = +1{,}5$	$f = +0{,}6$	$f = +0{,}4$	$f = -0{,}6$
10° 170° 190° 350°	imaginär	+ 15,35 + 1,23	+ 15,81 + 0,77	+ 14,61 — 1,45
20° 160° 200° 340°	»	+ 2,80 + 1,48	+ 3,60 + 0,68	+ 5,41 — 1,13
30° 150° 210° 330°	»	imaginär	+ 1,63 + 0,37	+ 3,10 — 1,10
45° 135° 225° 315°	»	+ 0,72 + 0,28	+ 1,17 — 0,17	+ 2,07 — 1,07
60° 120° 240° 300°	»	+ 0,89 — 0,22	+ 1,09 — 0,48	+ 1,71 — 1,05
90° 270°	»	+ 0,93 — 0,43	+ 1,06 — 0,53	+ 1,54 — 1,04

Die Kurven $f = +0{,}6$ und $f = +0{,}4$ sind in der Figur punktiert gezeichnet.

Für $q_1 = \frac{1}{2}$ verliert die singuläre Kurve N_2 ihre Schleife und das Schrankungsbereich für ε ist dann für $q_1 > \frac{1}{2}$ kleiner als 90°.

4 b. Für $q_1 > 1$ besteht nur noch das Gebiet F_{4b}, das in Frage kommen kann (s. Fig. 4). Es is allerdings noch ein reelles Gebiet, nämlich F_8, entstanden; aber dieses kann nicht in Betracht kommen, da es oberhalb der im Abstande 1 zu der f-Achse gezogenen Parallelen liegt. Das Gebiet F_{4b} wird von ρ_3 und ρ_2 begrenzt und von der singulären Linie L_2 im Punkte $f = +2q_1$, $\alpha''_3 = +1$ berührt. Innerhalb F_{4b} kann u''_3 alle Werte annehmen

Die folgende Tabelle gibt, $q_1 = +2$ angenommen, für einige Werte von f die entsprechenden Wurzelwerte.

f	ρ_1	ρ_2	ρ_3
— 4	+ 5,00	— 1,00	— 1,00
0	+ 4,24	— 0,24	0,00
+ 4	+ 3,00	+ 1,00	+ 1,00
5	+ 2,00	+ 2,00	+ 1,25

ε kann alle Werte annehmen, jedoch ist das Schwankungsbereich kleiner geworden.

Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Bahnkurven übergehen. Für die singulären Kurven gibt die folgende Tabelle einige Werte:

u''_3	N_1	N_2	N_3
2° 358°	+ 3282,85 + 1,24	+ 3283,14	+ 1,00
6° 354°	+ 364,85 + 1,25	+ 365,10	.
10° 350°	+ 131,40 + 1,25	+ 131,66	.
20° 340°	+ 32,93 + 1,27	+ 33,20	.
30° 330°	+ 14,71 + 1,29	+ 15,00	.
60° 300°	+ 3,87 + 1,46	+ 4,83	.
90° 270°	+ 2,00 + 2,00	+ 3,00	.
120° 240°	+ 1,46 + 3,87	+ 4,83	.
150° 210°	+ 1,29 + 14,71	+ 15,00	.
160° 200°	+ 1,27 + 32,93	+ 33,20	.
170° 190°	+ 1,25 + 131,40	+ 131,66	.
174° 186°	+ 1,25 + 364,85	+ 365,10	.
178° 182°	+ 1,24 + 3282,85	+ 3283,14	+ 1,00

Man ersieht aus Figur 5, dass der von dem singulären Kreise N_3 umschlossene Raum von keiner singulären Kurve durchschnitten wird. Von den Bahnkurven können nur die in Betracht kommen, für die $+ 2q_1 > f > - 2q_1$ ist, wie aus den folgenden Zahlenwerten hervorgeht

u''_3	$f = + 6$	$f = + 4,5$	$f = 0$	$f = - 6$
30° 150° 210° 330°	+ 14,40 + 1,60	+ 14,86 + 1,14	+ 16,06 − 0,06	+ 17,43 − 1,43
45° 135° 225° 315°	+ 6,24 + 1,76	+ 6,83 + 1,17	+ 8,12 − 0,12	+ 9,39 − 1,39
60° 120° 240° 300°	+ 3,00 + 2,83	+ 4,12 + 1,22	+ 5,52 − 0,18	+ 6,68 − 1,34
90° 270°	imaginär	+ 2,22 + 1,78	+ 4,24 − 0,24	+ 5,32 − 1,32

Die Kurve $f = 0$ ist in der Figur punktiert gezeichnet. Für die Planeten ist q_1 bedeutend grösser als 1.

So ist für

Erde $q_1 = 37405$

Mars $q_1 = 50102$

Jupiter $q_1 = 55101$

Saturn $q_1 = 86072$

Im Falle der Planeten kann u'_3 alle Werte annehmen, ebenso ε, aber das Schwankungsbereich für ε ist verschwindend klein geworden und beträgt z. B. für die Erde im Maximum nur 3''.

4 c. Für $q_1 = 1$ verschwindet das Gebiet F_{4a}. Die beiden singulären Linien L_1 und L_2 fallen zusammen und berühren das Gebiet F_{4b} im Abstande $f = +2q_1$ Die singuläre Bahnkurve N_1 fällt teils mit N_2, teils mit N_3 zusammen.

4 d. Für negative q_1 gilt auch das oben Gesagte. Die die Wurzeln darstellende Figur ist das Spiegelbild in Bezug auf die f-Achse zu den entsprechenden positiven q_1 Werten. Die Bahnkurven bleiben dieselben.

5. Betrachten wir jetzt nicht α_2, sondern α_1 als Parameter, so kann man zu dieser Untersuchung nicht mehr die Gleichung (5) benützen, sondern muss auf die Gleichung (4) zurückgehen.

Infolge $m_1 = \alpha_2^2 - \alpha_1^2 = \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0$ muss m_1 immer positiv sein und kann nur alle Werte zwischen 0 und α_2^2 annehmen.

Die singulären Kurven für g und m_1, das wir an Stelle von α_1 als Parameter benützen wollen, sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$g = \frac{3}{2} n^2 (C - A) \frac{2\alpha_2^2 - 3m_1}{2\alpha_2^2} + \frac{\alpha_2^4}{3(C - A)(2\alpha_2^2 - 3m_1)}$$

$$g = \pm n\alpha_2.$$

Für die Koordinaten der Berührungspunkte erhält man

$$m_1 = \frac{2\alpha_2^2}{3} \mp \frac{2\alpha_2^3}{9n(C - A)}$$

$$g = \pm n\alpha_2,$$

wo die zweiten Vorzeichen für ein negatives α_2 gelten.

Über das Aussehen dieser singulären Kurven D_1 und D_2 orientieren die folgenden, für die Erde berechneten, Zahlenwerte

m_1	D_1	D_2
0,1	+ 21642	+ 0,98
0,2	+ 26280	.
0,3	+ 33447	.
0,4	+ 45981	.
0,5	+ 73584	.
0,6	+ 183960	.
0,667	$\pm\infty$	.
0,7	— 367920	.
0,8	— 91980	.
0.9	— 52560	.
1,0	— 36792	+ 0,98

Was für Gebiete F_4 erhält man für verschiedene m_1 Werte?

1.) $\alpha_2 < 3n\,(C - A)$. Für $m_1 = 0$ erhält man ein Gebiet F_4 mit den beiden Untergebieten F_{4a} und F_{4b}, wo u''_3 in Libration sein oder alle Werte annehmen kann. Wird m_1 grösser als $\frac{2\alpha_2^2}{3} - \frac{2\alpha_2^3}{qn(C-A)}$, so bleibt nur noch das Gebiet F_{4b} übrig. Überschreitet θ_0 den Wert $\theta_0 = 54^0\,44'\,8''$, so tritt eine Umkehrung der Kurven ein, indem z. B. der Scheitel der Parabel im entgegengesetzten Quadranten zu liegen kommt, als ob man die Papierebene erst um die g-Achse und dann um die α''_3 -Achse gedreht hätte. Für $m_1 = \alpha_2^2$ erhalten wir wieder ein Gebiet F_4 mit 2 Untergebieten.

2.) $\alpha^2 > 3n\,(C - A)$. Dann erhält man bei dem ganzen Vorgange niemals ein Gebiet F_4 mit 2 Untergebieten. Es kann also nie Libration entstehen.

Für $\theta_0 > 0^0$ muss man dann zur Entscheidung über die Rotationsrichtung die Projektion auf die zur jeweiligen Rotationsachse senkrechten Ebene in Betracht ziehen.

6. Nach dem Delaunayschen Theorem haben die Differentialgleichungen (3) die folgenden Lösungen:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_1 \\
\alpha_2 &= \gamma_2 \\
\frac{\partial W}{\partial f} &= \frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma_3 \\
u_1 &= -\frac{\partial C_1}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 \\
u_2 &= -\frac{\partial C_1}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 \\
u''_3 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha''_3}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Aus $\frac{\partial W}{\partial f} = \frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma_3$ erhalten wir α''_3 als eine periodische Funktion der Zeit mit der Periode $\frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma_3$; u_1, u_2 und u''_3 sind Funktionen von α''_3 und so auch periodische Funktionen der Zeit mit demselben Argument. Setzen wir zuerst

$$u''_3 = n_3 t + c_3 + \Sigma\, \alpha_i \sin (n_3 t + c_3),$$

so können wir uns die Frage vorlegen, wie ändert sich die mittlere Bewegung von u''_3 beim Übergange über die singuläre Linie L_2 und bei Annäherung an die singuläre Linie L_1. Nennen wir die Periode $2\, T_1$ so können wir $n_3 = \frac{\pi}{T}$ setzen.

Die Reihenfolge der Wurzeln ist

$$\text{in } F_4 a : \varphi_2\, \varphi_1\, \varphi_3 + \infty$$
$$\text{in } F_4 b : \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_1 + \infty,$$

wo in beiden Fällen α''_3 zwischen den beiden ersten Wurzeln liegt.

Die folgenden Substitutionen wenden wir an

$$\text{(14)}\quad \begin{array}{ll} \text{in } F_{4a} & \alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\, z_1^2 \\ F_{4b} & \alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2)\, z_2^2. \end{array}$$

Für T erhalten wir dann

$$\text{in } F_{4a} \quad T = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2q_1(\rho_3 - \rho_1)}} \int_0^1 \frac{dz_1}{\sqrt{(1 - z_2^2)(1 - k^2 z_1^2)}}$$

$$F_{4b} \quad T = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2q_1(\rho_1 - \rho_2)}} \int_0^1 \frac{dz_2}{\sqrt{(1 - z_2^2)(1 - k^2 z_2^2)}})$$

mit den Moduln $k^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2}$ in F_{4a} und $k^2 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$ in F_{4b}.

Auf der Linie L_2 wird $\rho_1 = \rho_3$ und infolgedessen beide Moduln gleich 1, also T unendlich. Die Bewegung geht ohne Sprung in die Limitationsbewegung, und zwar von beiden Seiten aus, über. Die mittlere Bewegung wird Null.

Auf der Linie L_1 wird $\rho_1 = \rho_2$ und daher T gleich Null.

Dasselbe Resultat erhält man für den Punkt $f = 2q_1$, wo $\rho_3 = \rho_2$ ist.

Für $q_1 = \pm 1$ fallen bekanntlich die singulären Linien L_1 und L_2 bez. L'_2 zusammen und berührsen das Gebiet F_{4b} in $f = \pm 2q_1$. Für diesen Punkt hat T einen endlichen Wert.

Für $q_1 > 1$ hat man für die Punkte $f = \pm 2q_1$ auch

$$T = o.$$

Für α''_3 bekommen wir nach (14)

$$\begin{array}{ll} \text{in } F_{4a} & \alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\, sn^2 v_1 \\ \text{in } F_{4b} & \alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2)\, sn^2 v_2, \end{array}$$

wo

$$snv_1 = z_1 = sn\left(\frac{\sqrt{2q_1(\rho_3 - \rho_2)}}{\alpha_2} \frac{\partial C_1}{\partial f}\, t + \gamma'_3\right)$$

$$snv_2 = z_2 = sn\left(\frac{\sqrt{2q_1(\rho_1-\rho_2)}}{\alpha_2}\frac{\partial C_1}{\partial f}t + \gamma'_3\right).$$

Die Grösse sn^2v lässt sich durch die Fouriersche Reihe

$$sn^2v = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2\left\{\frac{4K}{\pi^2}(K-E) - 8\sum_1^{\infty}\cos\frac{n\pi v}{K}\right\}$$

ausdrücken.

Die in E vorkommende Grösse $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist für $q_1 > 1$ sehr klein — für $q_1 = 1$ ist $q < 0{,}003$ —, so dass man die höheren Potenzen von q vernachlässigen kann. Es ist dann praktischer, sn durch θ Funktionen darzustellen.

$$snv = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(v)}{\theta(v)} = \frac{2}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi v}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\sin 3\frac{\pi v}{2K} + \dots}{1 - 2q\cos\frac{\pi v}{K} + \dots\dots}$$

Infolge der Kleinheit von q brauchen wir nur das erste Glied im Zähler mitzunehmen und können snv schreiben

$$snv = \frac{2}{\sqrt{k}}\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi v}{2K}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung für α''_3 ein, so erhält diese für $q_1 > 1$ das Aussehen

$$\alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2)\frac{4}{k}\sqrt{q}\sin^2\frac{\pi v_2}{2K}.$$

Für Erde, Mars, Jupiter und Saturn ist k so verschwindend klein (z. B. für die Erde $k < 0{,}00000000036$), dass man k^2 gleich Null setzen kann.

Das Integral

$$\frac{\alpha_2}{\sqrt{2q_1(\rho_1-\rho_2}}\int_0^{z_2}\frac{dz_2}{\sqrt{(1-z_2^2)(1-k^2z_2^2\psi)}}$$

lässt sich dann direkt integrieren. Für $k^2 = o$ erhalten wir

$$v_2 = \arcsin z_2 = \arcsin\sqrt{\frac{\alpha''_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2}},$$

folglich

$$\alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2) \sin^2 v_2.$$

Auch für $f = q_1^2 + 1$ und $f = -2q_1$ wird k gleich Null. Da für diese $\rho_1 = \rho_2$, resp. $\rho_3 = \rho_3$ ist, so erhalten wir für diese Punkte, wie vorauszusehen war,

für $f = 1 + q_1^2$ $\quad \alpha_3 = \rho_2$ $\quad$ für $f = -2q_1$ $\quad \alpha''_3 = \rho_2$..

Auf der singulären Linie L_2 wird $\varphi_1 = \varphi_3$ und daher $k = 1$. Wir bekommen

$$v_2 = ln \frac{1 + z_2}{1 - z_2} = ln \frac{\sqrt{\rho_3 - \rho_2} + \sqrt{\alpha''_3 - \rho_2}}{\sqrt{\rho_3 - \rho_2} - \sqrt{\alpha''_3 - \rho_2}}$$

folglich

$$\alpha''_3 = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2) \left(\frac{e^{v_2} - 1}{e^{v_2} + 1}\right)^2.$$

Wenn also t unendlich wird, tritt Limitation nach ρ_3 hin ein.

Für u'_3 hatten wir nach (9) gefunden

$$\sin u'_3 = \sqrt{\frac{2q_1\alpha''_3 - f}{\alpha''^2_3 - 1}} = \sqrt{\frac{2q_1 \cdot X_2}{X_1 - 2q_1 \cdot X_2}}.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{X_1}{2q_1 \cdot X_2}.$$

Wir haben nun α''_3 in X_1 und X_2 durch seine in (14) für F_{4a} und F_{4b} gegebenen Ausdrücke zu ersetzen und erhalten dann

$$\text{in } F_{4a} \quad X_1 = -(\rho_1 - \rho_2)^2 sn^2 v_1 cn^2 v_1$$
$$X_2 = (\rho_1 - \rho_2)(sn^2 v_1 - k^2)$$
$$\text{in } F_{4b} \quad X_1 = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_2) sn^2 v_2 dn^2 v_2$$
$$X_2 = - \quad (\rho_3 - \rho_2) cn^2 v_2.$$

Folglich

(15) $\quad$ in F_{4a} $\quad$ $$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{sn^2 v_1 cn^2 v_1}{k^2 - sn^2 v_2}.$$

$$(15^*) \qquad \text{in } F_{4b} \qquad \operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{sn^2 v_2 dn^2 v_2}{cn^2 v_2}.$$

Um die Ausdrücke für $\operatorname{ctg}^2 u'_3$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln, bestimmen wir nach Charlier* die Pole dieser Ausdrücke.

Für (15) haben wir die Pole

$$v_1 = \pm \chi \quad (sn\chi = \pm k)$$

$$v_1 = \pm iK'.$$

Ausserdem ist $a = 2K$, $b = K + iK'$, $Q = i\sqrt{q}$.

Um die Residu für $v_1 = \pm \chi$ zu erhalten, setzen wir $v_1 = \pm \chi + x$ und entwickeln (15) nach Potenzen von x. Dann wird

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{\sin \chi \cos \chi}{\mp 2\, dn\chi} \cdot \frac{1}{x},$$

also

$$A = \mp \frac{1}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Ebenso setzen wir $v_1 = \pm iK' + x$ und erhalten die Residu für $v_1 = \pm iK'$.

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{1}{\frac{k^2}{cn^2 iK'} - \frac{sn^2 iK'}{cn^2 iK'}} \cdot \frac{1}{k^2 x^2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1}{k^2 x^2},$$

folglich

$$A = 0 \qquad A_1 = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Für $\operatorname{ctg}^2 u'_3$ erhalten wir so

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = C_1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{k}{\sqrt{1 + k_2}} [V_2(v_1 - \chi) - V_2(v_1 + \chi)]$$

---

* Charlier. Om Utvecklingen af dubbelperiodiska funktioner i Fourierska serier. Bih. t. K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar Bd. 12. Afd. I. No. 9.

$$+ C'_2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{1}{k^2}\left[V'_0(v_1 + K) + V'_0(v_1 - K) - \frac{i\pi}{2K}\right],$$

wo

$$C'_1 + C'_2 = C' = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\int_0^{2K} \frac{sn^2 v_1 cn^2 v_1}{k^2 - sn^2 v_1}\, dv_1.$$

C' berechnen wir durch Zerlegung und bekommen

$$C' = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\left[-1 + k^2 + \frac{1}{k^2} - \frac{E}{K} \cdot \frac{1}{k_2} + \frac{k'^2}{2K}\int_0^{2K} \frac{k^2 dv_1}{k^2 - sn^2 v_1}\right]$$

$$= \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\left[\frac{1 - k^2 + k^4}{k^2} - \frac{E}{K} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{k}{\sqrt{1 + k_3}} Z(\chi)\right].$$

Setzen wir diesen Wert von C' ein, so erhalten wir

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\left\{\frac{1 - k^2 + k^4}{k^2} - \frac{E}{K}\frac{1}{k^2} - \right.$$

$$- \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} Z(\chi) - \frac{i\pi}{2Kk^2}$$

$$- \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}\left[\frac{\sin \frac{\pi\chi}{2K}}{\cos \frac{\pi\chi}{2K} - \cos \frac{\pi v_1}{2K}} - \frac{\pi}{K}\sum_1^\infty \frac{(i\sqrt{q})^{2n}}{1 - (i\sqrt{q})^{2n}} \sin n\chi \cos n v_1\right]$$

$$\left. + \frac{1}{k^2} \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1 - (-q)^n} \cos n \frac{\pi v_1}{K}\right\}$$

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\left\{ - k'^2 - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{i\pi}{2K} + \right.$$

$$+ \frac{2\pi^2}{K^2} \cdot \frac{1}{k^2} \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1 - (i\sqrt{q})^{2n}} \left(\frac{1}{1 + (i\sqrt{q})^{2n}} - \cos n \frac{\pi v_1}{K}\right)$$

$$- \frac{k}{1 + k^2} \frac{\sin \frac{\pi\chi}{2K}}{\cos \frac{\pi\chi}{2K} - \cos \frac{\pi v_1}{2K}} -$$

$$-\frac{k}{1+k^2}\frac{\pi}{K}\sum_1^\infty \frac{(i\sqrt{q})^{2n}}{1-(i\sqrt{q})^{2n}} \sin n\frac{\pi\chi}{2K}\left(\frac{(-1)^n \cdot 4}{1-q^n}\cos n\frac{\pi\chi}{2K} - \cos n\frac{\pi v_1}{2K}\right)\Big\}.$$

Die Entwickelung für $\operatorname{ctg}^2 u'_3$ in $F_4 b$ ist ähnlich. Es ist

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2} tn^2 v_2 dn^2 v_2 = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\left\{\frac{k'^2}{cn^2 v_2} - k'^2 + k^2 sn^2 v_2\right\},$$

wo

$$k^2 sn^2 v_2 = \frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos n\frac{\pi v_2}{K}.$$

Für $\frac{1}{cn^2 v_2}$ ist der Doppelpol $p = K$. Ausserdem ist hier

$$a = 2K \quad b = K + iK' \quad Q = i\sqrt{q} \quad A = o \quad A_1 = -\frac{1}{k'^2}$$

$$C = 1 - \frac{E}{K}\cdot\frac{1}{k'^2}.$$

Durch Einsetzen in $\operatorname{ctg}^2 u'_3$ erhält man

$$\operatorname{ctg}^2 u'_3 = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\Big\{-1 + \frac{\pi^2}{16K^2\cos^2\frac{\pi v_2}{2K^2}} +$$

$$\frac{\pi^2}{2K^2}\sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-(i\sqrt{q})^{2n}}\left[\frac{4}{1+(i\sqrt{q})^{2n}}\left(2\sin^2 n\frac{\pi v_2}{2K}+1\right)\right.$$

$$\left. - \cos n\frac{\pi v_2}{2K}\right]\Big\}.$$

Für Erde, Mars, Jupiter und Saturn, für die nur der Fall F_{4b} in Betracht kommt, können wir $k = o$ annehmen. Dann erhalten wir

$$\operatorname{ctg} u'_3 = \sqrt{\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}}\operatorname{tg} v_2 = \sqrt{\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}}\operatorname{ctg} v'_2,$$

folglich

$$u'_3 = v'_2 + \text{period. Glieder},$$

wo wir $\qquad v'_2 = \frac{\pi}{2} - v_2$ gesetzt hatten.

Also

$$u'_3 = 90^0 - v_2.$$

Dasselbe Resultat erhält man im Falle $q_1 < 1$ für den Punkt $f = -2q_1$ und im Falle $q_1 > 1$ für die Punkte $f = \pm 2q_1$. Da für $f = 1 + q_1^2$ auch $\rho_1 = \rho_2$ ist, so erhalten wir dort

$$u'_3 = \frac{\pi}{2},$$

also Libration, wenn man den Fall

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2}} \operatorname{tg} r_2 = \infty$$

ausnimmt.

Auf der singulären Linie L_2 wird bekanntlich $k = 1$. Es ist dann

$$\operatorname{ctg} u'_3 = \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \cdot \frac{e^{v_1} - e^{-v_1}}{e^{v_1} + e^{-v_1}} = \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \cdot \frac{e^{v_2} - e^{-v_2}}{e^{v_2} + e^{-v_2}}.$$

Für $t = \infty$ wird der zweite Faktor in dem Produkt gleich 1. Wird nun q_1 gleich 1, so nähert sich u'_3 dem Werte $u'_3 = 90^0$, nimmt aber q_1 bis Null ab, so sind u'_3 auch gleich Null. Wir haben also für $q_1 = 0$ auf der singulären Linie Limitation in u'_3 zu dem Werte $u'_3 = 0$ hin, also $u_3 = \lambda$.

Für die Planeten $(k = 0)$ wollen wir noch die Eulerschen Winkel φ und ψ berechnen. Es ist unter Annahme von $\varepsilon > \theta_0$

$$\varphi = u_1 - u_2$$

$$= \varphi_0 + \Big\{ \omega + \omega k_1 (1 - \cos\theta_0) + \frac{3}{2}\frac{n^2}{\omega} k_1 \frac{A}{b}\Big[(1 - \cos\theta_0)\cos\theta_0 +$$

$$\big((6\cos^2\theta_0 - 3\cos\theta_0 - 1)(\rho_2 + (\rho_3 - \rho_2)\sin^2 v_2)^2 +$$

$$+ 3(1 - \cos\theta_0)\cos\theta_0\big) \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \operatorname{ctg}^2 v_2\Big]\Big\},$$

wo

$$v_2 = \sqrt{\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\alpha_2}} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial f} t + \gamma'_3,$$

und

$$\psi = -u_3 = -u'_3 + \lambda = v_2 - 90^0 - \lambda$$
$$= \psi_0 + \frac{3}{2}\frac{n^2}{\omega} \cdot k_1 \frac{A}{C} \cdot \frac{3\cos^2\theta_0 - 1}{2} \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}\, t - \lambda.$$

7. In Hinsicht auf die sekularen Störungen im planetarischen Rotationsprobleme zeigt es sich, dass man das Problem unter Annahme von α_1 oder von α_2 als Parameter behandeln kann.

Unter Annahme von α_2 als Parameter bekommt man, wenn die α_2 proportionale Grösse q_1 kleiner als Eins, aber grösser als Null ist, zwei Gebiete. In dem einen Gebiete, nämlich für $q_1^2 + 1 > f > + 2q_1$ erhält man Libration in u''_3 um den Wert $u''_3 = 90^0$ und ein begrenztes Schwankungsbereich für ε, das in diesem Gebiete nicht alle Werte zwischen 0^0 und 180^0 annehmen kann. In dem anderen Gebiete $+ 2q_1 > f > - 2q_1$, kann u''_3 unbegrenzt wachsen, das Schwankungsbereich für ε ist aber auch begrenzt, obwohl ε alle Werte zwischen 0^0 und 180^0 annehmen kann. Die beiden Gebiete sind durch eine Limitationslinie für ε getrennt. Der eine Grenzfall ist $q_1 = 0$, wo das Gebiet mit unbegrenztem Wachsen von u''_3 verschwunden ist und nur noch das Librationsgebiet für u''_3 besteht, in dem das Schwankungsbereich von ε zu dem Werte $\varepsilon = 90^0$ symmetrisch liegt und auf der Linie $f = 0$ die Werte $\varepsilon = 0^0$ und $\varepsilon = 180^0$ miteinschliesst. Der andere Grenzfall ist $q_1 = 1$. Hier ist das Gebiet mit Libration in u''_3 verschwunden und es besteht nur noch das Gebiet mit unbegrenztem Wachsen in u''_3. Die Grösse ε kann alle Werte annehmen, nur ist ihr Schwankungsbereich kleiner geworden als vorher. Die Verkleinerung des Schwankungsbereiches von ε nimmt für wachsendes q_1 bis zu dem Grenzfall $q_1 = + \infty$ zu, wo an Stelle des Gebietes eine grade Linie tritt. Infolgedessen ist

ε eine Konstante, u''_3 kann noch immer unbegrenzt wachsen. Überschreitet α_2 den letzteren Grenzwert oder wird, was dasselbe ist, q_1 negativ, so widerholt sich während q_1 alle Werte von $-\infty$ bis 0 durchläuft, derselbe Vorgang, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Benützt man α_1 an Stelle von α_2 als Parameter, so erhält man, während m_1 von 0 bis α_2^2 wächst, denselben Vorgang, also zuerst 2 Gebiete, dann 1 Gebiet, die grade Linie, wieder 1 Gebiet und zuletzt 2 Gebiete, wenn α_2 kleiner als eine bestimmte Grösse ist. Sonst erhält man beim Wachsen von m_1 von 0 bis α_2^2 nur ein Gebiet mit unbegrenztem Wachsen von u''_3 und kleinern Schwankungsbereich für α''_3 mit dem Grenzfall, dass α''_3 eine Konstante wird, u'_3 alle Werte annehmen kann. Überschreitet m_1 diesen Grenzwert, so bekommen wir wieder das oben erwähnte Gebiet.



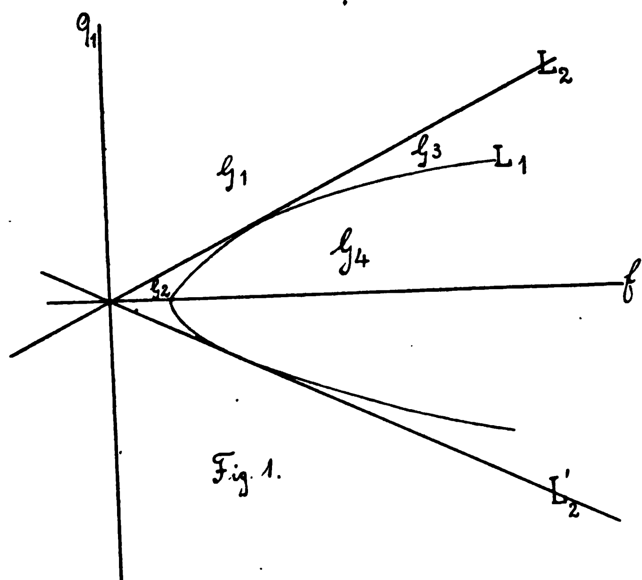


Fig. 1.

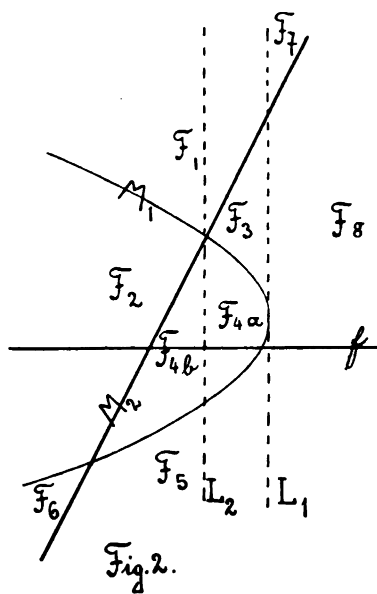


Fig. 2.

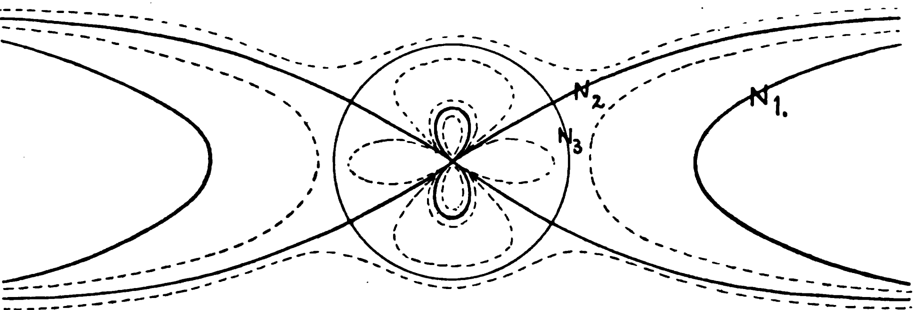
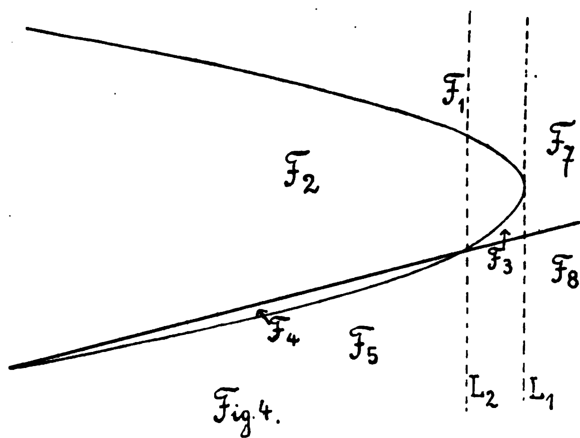
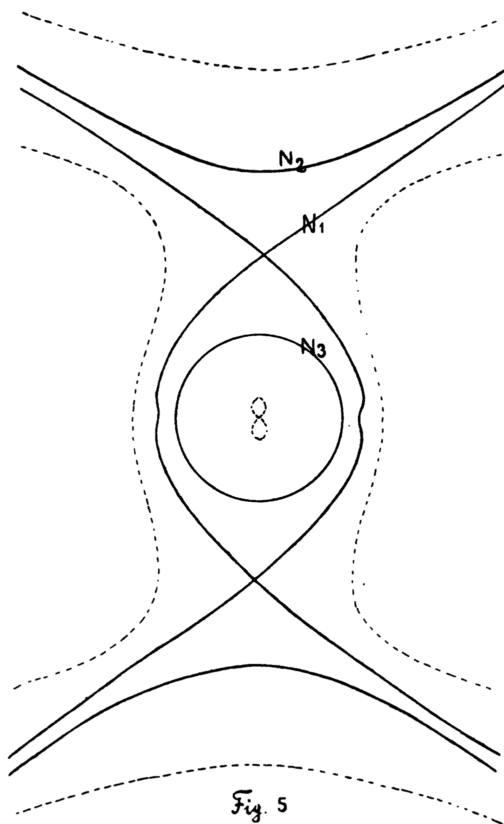


Fig. 3


$\mathfrak{F}_1$
$\mathfrak{F}_2$
$\mathfrak{F}_7$
$\mathfrak{F}_3$
$\mathfrak{F}_8$
$\mathfrak{F}_4$
$\mathfrak{F}_5$
L_2
L_1
Fig. 4.


N_2
N_1
N_3
Fig. 5